

תרגול - המרחב הדואלי.

10 בפברואר 2013

1 מרחב דואלי - הגדרות וסימונים

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} . העתקה לינארית $f : V \rightarrow \mathbb{F}$ נקראת פונקציונל.

הגדרה 1.2 הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} . אוסף כל הפונקציונלים מ V נקרא מרחב דואלי של V ומסומן ב V^* .

סימון: יהי f פונקציונל. להמשך התרגול הנ"ל במקום לסמן $f(v)$ נסמן $[v, f]$.

2 תכונות של מרחב דואלי כמרחב וקטורי

משפט 2.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ סקלרים כלשהם ב \mathbb{F} , אזי קיים פונקציונל יחיד כך ש $[v_i, f] = \alpha_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

משפט 2.2 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V , אזי קיים בסיס יחיד של V^* שמוגדר על ידי $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ כך ש $[v_i, f_j] = \delta_{ij}$.

מסקנה 2.3 V^* הוא מרחב וקטורי n מימדי.

תרגיל: הוכח את המשפט הבא:

משפט 2.4 יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה \mathbb{F} . יהיו $u \neq v \in V$, אזי קיים פונקציונל לינארי $f \in V^*$ כך ש $[v, f] \neq [u, f]$. באופן שקול - לכל $w \in V$ $0 \neq f \in V^*$ כך ש $[w, f] \neq 0$.

הוכחה: שקילות של הטענות נובעת אם ניקח $w = v - u$. לכן נוכיח את הטענה האחרונה בלבד. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V , $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ הבסיס הדואלי. אם $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, אזי $[w, f_i] = a_i$ לכל i . לכן אם $[w, f] = 0$ לכל f , בפרט $[w, f_i] = 0$ לכל i , ולכן $a_i = 0$ לכל i , בסתירה לכך ש $a_i = 0$. ■

3 "הדואלי של הדואלי"

מכיוון ש V^* הוא מרחב וקטורי בזכות עצמו, אפשר לדבר על מרחב הדואלי ל V^* , $(V^*)^*$. לצורך הפשוט, בהמשך נסמן אותו על ידי V^{**} . התיאור המילולי של איבר ב V^{**} הוא קצת מסורבל, זהו פונקציונל לינארי מקבוצת הפונקציונלים הלינאריים מ V . כאן נראה את היתרון של הסימון $[\]$. בעזרתו קל מאד לתאר את היחסים בין V ל V^{**} . הכל הופך להיות למשחק עם סימונים.

אם נביט בסימון $[v, f]$ עבור $f = f_0 \in V$ קבוע, לא קיבלנו יותר מדיי מידע חדש - זו היא פשוט דרך אחרת לרשום את הערך $f_0(v)$ של הפונקציה f_0 ב v . לעומת זאת אם נקבע $v = v_0 \in V$, נשים לב שהפונקציה $\mathbb{F} \rightarrow V^* [v_0, \]$ היא פונקציונל לינארי מ V^* , כלומר איבר ב V^{**} . פעולה הנ"ל נותנת לנו תאור של חלק מאיברי V^{**} . נשאלת שאלה - האם כל איבר ב V^{**} , הם מהצורה $[v, \]$? התשובה היא - לפעמים, ליתר דיוק כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי. נוכיח את המשפט הבא:

משפט 3.1 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה \mathbb{F} , אזי לכל $z \in V^{**}$ קיים $v \in V$ כך ש $z(f) = [v, f] = f(v)$ לכל $f \in V^*$. ההתאמה $v \rightleftharpoons z$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

הוכחה: לכל וקטור $v \in V$ נתאים $z = [v, \]$. נשאיר לבדיקה עצמית שזו היא העתקה לינארית. נראה שהיא חח"ע ועל.

1. חח"ע: יהיו $v_1, v_2 \in V$, $z_1, z_2 \in V^{**}$ המוגדרים על ידי $z_i = [v_i, \]$. אזי $0 = z_1 - z_2 = [v_1 - v_2, \]$. לפי משפט 2.4, $v_1 - v_2 = 0$ ז"א העתקה היא חח"ע.

2. על: כאן אנחנו משתשמים בכך של V יש מימד סופי n . לפי המסקנה 2.3 V^* אף הוא n מימדי, שזה אומר שגם V^{**} הוא n מימדי. יש לנו העתקה לינארית חח"ע בין מרחבים וקטוריים מאותו מימד, וכפי שזכור מלינארית 1 העתקה כזו חייבת להיות על.

הערה 3.2 נשים לב, שיש כאן התאמה טבעית שמתאימה לכל וקטור ב V וקטור ב V^{**} . זה מאפשר לנו לזהות את V^{**} אם V בנוסף - שימו לב שהטענה אינה נכונה עבור מרחבים וקטוריים ממימד אינסופי.

■

4 מאפס של קבוצה

הגדרה 4.1 יהי $S \subseteq V$. המאפס של S ב V^* הוא אוסף כל כל הפונקציונלים מ V כך ש $[s, f] = 0$ לכל $s \in S$. מאפס יסומן ב S^0 .

הערה 4.2 שימו לב ש S שמופיע בהגדרה אינו חייב להיות תת-מרחב של V , אבל S^0 הוא תמיד תת-מרחב של V^* (נא לבדוק!).

טענה 4.3 $V^0 = \{\bar{0}\}$, $\{0\}^0 = V^*$. $\bar{0}$ הוא פונקציונל האפס - ששולח כל וקטור ב V ל 0.

תרגיל: הוכח את השפט הבא:

משפט 4.4 יהי V מרחב וקטורי n מימדי, $W \subseteq V$ תת-מרחב v מימדי. אזי W^0 הוא תת-מרחב וקטורי $n - m$ מימדי.

הוכחה: $B = \{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_{n-m}\}$ בסיס של V כך ש m הוקטורים הראשונים שלו הם בסיס של W . יהי $B^* = \{f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_{n-m}\}$ הבסיס הדואלי של V^* . אנו נראה, ש $U = \text{span} \{g_1, \dots, g_{n-m}\} = W^0$.

1. $W^0 \supseteq U$. יהי $g \in U$. אזי $g = \sum_{i=1}^{n-m} g_i$. לכל $1 \leq w_i \leq m$ מתקיים $[w_i, g] = \sum_{j=1}^{n-m} [w_i, g_j] = 0$ מכיוון ש g מתאפסת על הבסיס של W , מתאפסת על W .

2. $W^0 \subseteq U$. יהי $f \in W^0$. אזי $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n-m} \beta_j g_j$. לכל $1 \leq i \leq m$, $0 = [w_i, f] = \alpha_i$ לכן $f \in U$.

■

כמו שאמרנו קודם, כאשר ל V יש מימד סופי, אנחנו מזהים את V עם V^{**} לאור האיזומורפיזם הטבעי.

משפט 4.5 יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V$ תת-מרחב, אזי $(W^0)^0 = W$.

הוכחה: לפי ההגדרה, לכל $w \in W, g \in W^0$ מתקיים, $[w, g] = 0$, לכן $W \subseteq (W^0)^0$. מצד שני, ל W^0 ו W אותו מימד לפי הטענה הקודמת, לכן W^0 ו W שווים. ■

5 המרחב הדואלי של סכום ישר

משפט 5.1 יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V, U$ תת-מרחבים של V כך ש $V = W \oplus U$, אזי $W^* \cong V^0, V^* \cong W^0$.

הוכחה: נראה $W^0 \cap U^0 = \{0\}$. יהי $f \in W^0 \cap U^0$. לכל $v \in V$ קיימים $u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$. אזי מתקיים $[u + w, f] = [u, f] + [w, f] = 0 + 0 = 0$ לכן $v^* = \bar{0}$. נראה ש $W^0 + U^0 = V^*$. יהי $f \in V^*$. לכל $u + w = v \in V$, נסמן $f_U(v) := f_U(u)$, $f_W(v) = f_W(w)$. קל לראות ש $f_U + f_W = f$, ו $f_U \in U^0, f_W \in W^0$. לכן $V^* = U^0 + W^0$.

נראה שקיים איזומורפיזם בין W^0 ו U^* . נגדיר $\phi : W^0 \rightarrow U^*$ על ידי $\phi(f) = f|_U$. בדיקה שגירתית מראה שהעתקה הזאת היא לינארית. כמו כן, נגדיר $\psi : U^* \rightarrow W^0$, לפי $\psi(f)(v) = \psi(f)(w + u) = f(u)$. קל לבדוק (אבל תבדקו!) ש ψ הוא הופכי דו-כיווני של ϕ . ■