

אינפי 4 – תרגיל 4

מומלץ להציץ בחומר העזר על משפט גרין באתר לפני פיתרון התרגיל!

1. א. עבור איזו מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך בעלת כיוון חיובי (כזו שמשפט גרין תקף עבורה) במישור C ערך האינטגרל הקווי הבא יהיה מקסימלי?

$$\int_C (x + y)^3 dx + (3x^2y + 3x - e^y) dy$$

וחשבו ערך זה! .

ב. תהי $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ מסילה גזירה ברציפות, סגורה, לא קבועה במישור כך שמתקיים: $\int_{\gamma} -y^3 dx + x^3 dy = 0$. האם ייתכן שתמונת המסילה היא שפה של תחום סגור שעונה על הדרישות של משפט גרין?

2. חשבו את האינטגרל הקווי הבא:

$$\int_C (y + \tan^3 x) dx + (3x - \tan^3 y) dy$$

כאשר C העקום $y = x^3$ מהנקודה $(0,0)$ אל הנקודה $(1,1)$.

3. א. אם C קטע הישר שמחבר הנקודה (a, b) לנקודה (c, d) הוכיחו כי קיים:

$$\int_C -y dx + x dy = ad - bc$$

ב. אם קודקודי משולש הם $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ נמצאים בסדר הפוך לכיוון השעון אם נלך מאחד לשני לפי הסדר – הראו כי שטח המשולש הוא:

$$\frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)]$$

4. חשבו את האינטגרל: $\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ כאשר C מסילת ז"ורדן סגורה

פשוטה בעלת אורך שמקיפה תחום פשוט קשר עבורו נוסחת גרין תקפה:

א. כאשר המסילה איננה מקיפה את ראשית הצירים.

ב. כאשר המסילה כן מקיפה את ראשית הצירים.

(במקרה זה – ישנו מרחק חיובי בין תמונת המסילה לראשית הצירים וניתן להקיף את ראשית הצירים בעיגול קטן שכולו יהיה בתוך התחום אותו מקיפה המסילה המקורית שלנו...)

5. מהו השטח הכלוא (ברביע הראשון) על ידי הלולאה הסגורה המוגדרת על ידי אוסף הנקודות המקיימות: $x^3 + y^3 = 3xy$? "יצור גיאומטרי זה נקרא: העלה של דקארט (Folium of Descartes), ומכיוון שתמונה אחת שווה יותר מאלף מילים, הציצו בלינק - http://en.wikipedia.org/wiki/Folium_of_Descartes כדי לקבל מושג על הצורה המתקבלת.

רמז: השתמשו בהצגה $y = tx$ (שזהו טריק שימושי במעבר להצגה פרמטרית של עקומות...) כדי לקבל פרמטריזציה של העקום על ידי:

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} :$$

the leaf corresponds to $0 < t < \infty$

(השתמשו בנוסחת השטח עבור ההצגה של התבנית: $\frac{1}{2}(-ydx + xdy)$,

ונקבל בסוף אינטגרל לא אמיתי...).