אינפי 1 - תרגול 3

נתחיל בכמה תרגילים על היפר ממשיים לרענון.

1. יהי x היפר ממשי, $b<x<a$ ש a,b סופיים. הוכיחו שx סופי.

פתרון: b סופי, ולכן קיים r_1 ממשי כך ש- $b<r_1$ (אחרת b היה אינסוף חיובי). בנוסף, a סופי ולכן קיים r_2 ממשי כך ש- $r_2<a$ (אחרת a היה אינסוף שלילי). קיבלנו: $r_2<a<x<b<r_1 \Rightarrow$

$r_2<x<r_1$, לכן x סופי.

2. יהי x היפר ממשי, $x<H$, כאשר H היפר ממשי שלילי! הוכיחו ש x היפר ממשי שלילי!

פתרון: יהי r ממשי. $x<H<r \Rightarrow x<r$. x אינסוף שלילי!

3. הוכיחו שלכל a,b כך ש- $b<a$, $b<\frac{b+a}{2}<a$

פתרון: $b=\frac{2b}{2}=\frac{b+b}{2}<\frac{b+a}{2}<\frac{a+a}{2}=\frac{2a}{2}=a$.

הגדרה: יהי $a\in\mathbb{R}^*$ ~~...~~ סופי. (נגדיר את החלק הסטנדרטי של a להיות המס' הממשי הקרוב אליו ביותר, כלומר, מס' ממשי שבינו לבין a ההבדל הוא אינפיניטסימלי. נסמן ב- $st(a)$.

הערה: $a=st(a)+\varepsilon$, כאשר ε אינפיניטסימלי.

תרגיל: הוכח שלכל a, $st(a)$ הוא יחיד.

פתרון: נניח שקיים r_1 ממשי כך ש- $a=r_1+\varepsilon$, וגם קיים r_2 ממשי כך ש- $a=r_2+\delta$. אז, $r_1+\varepsilon=a=r_2+\delta$

$$r_1+\varepsilon=r_2+\delta$$

$$\underbrace{r_1-r_2}_{\text{ממשי}}=\underbrace{\delta-\varepsilon}_{\text{אינפי'}}$$

לפי משפט מההרצאה, הממשי היחיד שהוא גם אינפיניטסימלי הוא 0.

לכן, $r_1-r_2=\delta-\varepsilon=0$

$$\Downarrow$$

$$r_1=r_2.$$

תכונות של החלק הסטנדרטי:

1. $st(-a)=-st(a)$
2. $st(a+b)=st(a)+st(b)$

3. $st(a-b)=st(a)-st(b)$

4. $st(ab)=st(a)\cdot st(b)$

5. אם $st(b)\neq 0$, אז $st(\frac{a}{b})=\frac{st(a)}{st(b)}$

6. $st(a^n)=(st(a))^n$

7. אם $a\geq 0$ אז $st(\sqrt[n]{a})=\sqrt[n]{st(a)}$

8. אם $a\leq b$ אז $st(a)\leq st(b)$

נוכיח את תכונה 7.

הוכחה: נסמן: $st(a)=b$. כלומר $a=b+\epsilon$. בנוסף, נסמן $st(\sqrt[n]{a})=c$

כלומר $\sqrt[n]{a}=c+\delta$. נרצה להראות ש $\sqrt[n]{b}=c$.

ולכן, $c+\delta=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b+\epsilon}\ /(\ )^n$

$$(c+\delta)^n=b+\epsilon$$

$$st((c+\delta)^n)=st(b+\epsilon)=b$$

מתכונה 6 ידוע ש- $st((c+\delta)^n)=[st(c+\delta)]^n=c^n$

קיבלנו $c^n=b \Rightarrow c=\sqrt[n]{b}$, מש״ל

תרגיל: 1. הוכח, אם a סופי, r ממשי, $st(a)<r$, אז $a<r$.

פתרון: נניח בשלילה ש $r\leq a$. ידוע ש- $a=st(a)+\epsilon$

$$st(a)+\epsilon\geq r$$

$$\epsilon\geq \underbrace{r-st(a)}_{\text{ממשי}}>0$$

כי $r>st(a)$

אם ϵ שלילי, לא ייתכן. אם ϵ חיובי, אזי הוא צריך להיות

גדול מממשי חיובי, ושוב לא ייתכן. קיבלנו סתירה!

2. הוכח: אם $st(a)<st(b)$, קיים r ממשי כך ש- $a<r<b$

פתרון: נראה ש- $a\underset{II}{<}\frac{st(a)+st(b)}{2}\underset{I}{<}b$. (שימו לב שזהו מס׳ ממשי)

הוכחת I. נב״ש ש $\frac{st(a)+st(b)}{2}\geq b$. לפי תכונה 8, זה גורר ש-

$$st\left(\frac{st(a)+st(b)}{2}\right)\geq st(b)$$

$$\Leftarrow \quad \underbrace{\frac{st(a)+st(b)}{2}}_{\text{כי לא מס' ממשי.}} \geq st(b)$$

ולכן שווה ל- st של עצמו.

$$\Leftarrow \quad st(a)+st(b) \geq 2st(b)$$

$st(a) \geq st(b)$ בסתירה לנתון.

II מקרה $a > \frac{st(a)+st(b)}{2}$. $\Leftarrow$ $st(a) \geq st\left(\frac{st(a)+st(b)}{2}\right)$ $\Leftarrow$

$$st(a) \geq \frac{st(a)+st(b)}{2} \Leftarrow 2st(a) \geq st(a)+st(b) \Leftarrow st(a) \geq st(b)$$

סתירה!

תרגיל: בביטויים הבאים מצא את החלק הסטנדרטי.

1. $\frac{2H+4}{3H-6}$

פתרון: $\frac{2H+4}{3H-6} = \frac{2+\frac{4}{H}}{3-\frac{6}{H}}$

$$st\left(\frac{2H+4}{3H-6}\right) = st\left(\frac{2+\frac{4}{H}}{3-\frac{6}{H}}\right) = \frac{st(2+\frac{4}{H})}{st(3-\frac{6}{H})} = \frac{2}{3}$$

2. $\frac{4}{3H-6}$

פתרון: H מס' אינפי' ולכן החלק הסטנדרטי שלו הוא 0.

3. $\frac{2H+4}{3}$ פתרון: H מס' אינסופי ולכן אין לו חלק סטנדרטי.

4. $\frac{(x+\epsilon)(y+\epsilon)-xy}{\epsilon}$. פתרון: $\frac{(x+\epsilon)(y+\epsilon)-xy}{\epsilon} = \frac{xy+\epsilon y+\epsilon x+\epsilon^2-xy}{\epsilon}$

$$= \frac{\epsilon y+\epsilon x+\epsilon^2}{\epsilon} = y+x+\epsilon. \quad st(y+x+\epsilon) = y+x$$

5. $\frac{b^2-25}{b-5}$ כאשר $st(b)=5$ אבל $b \neq 5$

פתרון: $\frac{b^2-25}{b-5} = b+5$

$$st(b+5) = st(b)+5 = 5+5 = 10$$

6. $2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right)$

פתרון: נכפול בצמוד ונקבל:

$$2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1} = 2H\,\frac{1+\frac{1}{H}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}$$

בס״ד

$$St\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{H}}+1}\right)=\frac{2}{St\left(\sqrt{1+\frac{4}{H}}+1\right)}=\frac{2}{St\sqrt{1+\frac{4}{H}}+1}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{St\left(1+\frac{4}{H}\right)}+1}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=\frac{2}{2}=1$$

7. $\frac{H+1+\epsilon}{2H-1+3\epsilon}$

פתרון: $\frac{H+1+\epsilon}{2H-1+3\epsilon}=\frac{1+\frac{1}{H}+\frac{\epsilon}{H}}{2-\frac{1}{H}+\frac{3\epsilon}{H}}$

$$St\left(\frac{1+\frac{1}{H}+\frac{\epsilon}{H}}{2-\frac{1}{H}+\frac{3\epsilon}{H}}\right)=\frac{St\left(1+\frac{1}{H}+\frac{\epsilon}{H}\right)}{St\left(2-\frac{1}{H}+\frac{3\epsilon}{H}\right)}=\frac{1}{2}$$

תזכורת: עבור $y=f(x)$ נסמן $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$.

אז: $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$. [(x_1,y_1) (x_2,y_2) הן 2 נקודות על הגרף של f).

כשמבקשים להעביר ישר בין 2 נקודות כאלה, השיפוע שלו הוא $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

כשרוצים לחשב שיפוע של משיק, שהוא קו ישר שעובר בנקודה (x_1,y_1)

בלבד, ניקח את הנקודה הזו ועוד נקודה שקרובה אליה באופן אינפיניטסימלי,

כלומר $\Delta x=\epsilon$.

הגדרה: $f'(x_1)=St\left(\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$. עבור Δx אינפיניטסימלי!

הנגזרת קיימת ב-x_1 אם קיים חלק סטנדרטי, והוא לא תלוי בבחירת Δx.

תרגילים: בפו' הבאות, חשב נגזרת:

1. $y=ax+b$

$$y'=St\left(\frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}\right)=$$

$$St\left(\frac{ax+a\Delta x+b-ax-b}{\Delta x}\right)=St\left(\frac{a\Delta x}{\Delta x}\right)=St(a)=a$$

2. $y=x^2$

פתרון: $y'=St\left(\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\right)=St\left(\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}\right)=$

$$St\left(\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\right)=St(2x+\Delta x)=2x$$

3. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

פתרון: $y'=St\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}\right)=St\left(\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}}}{\Delta x}\right)=$

$$St\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})}\right) = St\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}\right) =$$

כפל בצמוד

$$St\left(\frac{x-(x+\Delta x)}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}\right) = St\left(\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}\right) =$$

$$\frac{1}{St[(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})]} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{St(x+\Delta x)}(\sqrt{x}+\sqrt{St(x+\Delta x)})} = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x})} =$$

$$\frac{1}{x\cdot 2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

שימו לב: כש- $x=0$, מתקיים ש- $St(\text{מונה})=0$ ולכן אי אפשר להשתמש

בתכונה 5. במקרה זה, הביטוי יוצא אינסופי, לכן אין לו חלק סטנדרטי.

כלומר, לפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ אין נגזרת בנקודה $x=0$.

4. $y=\sqrt{x^2+2}$

פתרון:

$$y' = St\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}-\sqrt{x^2+2}}{\Delta x}\right) =$$

כפל בצמוד

$$St\left(\frac{(x+\Delta x)^2+2-(x^2+2)}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2})}\right) = St\left(\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2-x^2-2}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2})}\right) =$$

$$St\left(\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2})}\right) = St\left(\frac{2x+\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}}\right) =$$

$$\frac{St(2x+\Delta x)}{St(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2})} = \frac{2x}{\sqrt{St(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}$$

5. $y=|x+3|$

פתרון:

$$y' = St\left(\frac{|x+\Delta x+3|-|x+3|}{\Delta x}\right)$$

הוכחנו בתחילת התרגול שאם $0<St(a)$, וממשי, אז גם $0<a$.

בדומה ניתן לראות: שאם $0>St(a)$ אז גם $0>a$.

המשך

לכן, אם $x>-3$, גם $x+\Delta x>-3$. ואז ~~$y=x+3$~~

$$y'=st\left(\frac{x+\Delta x+3-(x+3)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)=st(1)=1$$

אם $x<-3$ גם $x+\Delta x<-3$ (שוב לפי משפט שהוכחנו) ואז:

$$y'=st\left(\frac{-(x+\Delta x+3)-(x+3)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{-\Delta x}{\Delta x}\right)=st(-1)=-1$$

אם $x=-3$:

$$y'=st\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right)$$

אם נבחר סכא $\Delta x>0$ נקבל 1, ואם נבחר סכא $\Delta x<0$ נקבל -1.

כלומר זה תלוי בבחירה של Δx, ולכן אין נגזרת בנקודה $x=-3$.

6. $y=\frac{x+1}{x-1}$

$$y'=st\left(\frac{\frac{x+\Delta x+1}{x+\Delta x-1}-\frac{x+1}{x-1}}{\Delta x}\right)=st\left[\frac{(x+\Delta x+1)(x-1)-(x+1)(x+\Delta x-1)}{\Delta x\,(x+\Delta x-1)(x-1)}\right]=$$

$-x \quad -x^2$

$$st\left[\frac{x^2+\Delta x\cdot x-\Delta x+x-1 \quad -x\cdot\Delta x+x-x-\Delta x+1}{\Delta x\,(x+\Delta x-1)(x-1)}\right]=$$

$$st\left(\frac{-2\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)}\right)=st\frac{-2}{(x+\Delta x-1)(x-1)}=\frac{-2}{st(x+\Delta x-1)(x-1)}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$