תזכורת: בשיעור הקודם דנו במקרה הבא: גוף שמחובר לקפיץ, ומותחים את הקפיץ ועוזבים אותו, הקפיץ מפעיל כח על הגוף וזה גורם לגוף לנוע, ורצינו להבין את משוואת התנועה של הגוף.

אמרנו שהכח שהקפיץ מפעיל על הגוף שווה ל$-ky$, כאשר k זה איזשהו מספר קבוע שתלוי בחומר שהקפיץ עשוי ממנו, וy זה הפונקציה שמתארת את מיקום הגוף.

$$F = ma$$

$$my'' = -ky$$

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

סימנו $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

הפתרונות שלה הם

$$y = c_1 \cos(\omega y) + c_2 \sin(\omega y)$$

היום נוסיף את כח החיכוך.

כח החיכוך שפועל על גוף שנמצא בתנועה שווה ל$-ly'$, כאשר l זה איזשהו מספר קבוע שתלוי בחומר שעליו נעים (מקדם החיכוך של החומר. יש מקדם חיכוך שונה לאוויר, לשולחן שעשוי מזכוכית, מעץ וכו'). וy' זה המהירות.

$$F = -ky - ly'$$

$$F = ma$$

$$my'' = -ky - ly'$$

$$y'' + \frac{l}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

סימונים: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $2b = \frac{l}{m}$

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0$$

קיבלנו מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים.

הפולינום האופייני הוא

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2$$

השורשים של הפולינום :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

נזכיר שb, ω שניהם מספרים ממשיים חיוביים.
יש 3 מקרים :
1. $\Delta > 0$, קורה כאשר $b > \omega$. ואז יש שני פתרונות ממשיים. - תנועה מרוסנת
2. $\Delta = 0$ קורה כאשר $b = \omega$. ואז יש פתרון יחיד $\lambda = -b$. - תנועה קריטית
3. $\Delta < 0$ קורה כאשר $b < \omega$ ואז יש שני פתרונות מרוכבים $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} = -b \pm \sqrt{(-1)(\omega^2 - b^2)} = -b \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega^2 - b^2} = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$. - תנועה בלתי מרוסנת

איך נראית משוואה התנועה?
1.

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

התנועה לא מחזורית!
שימו לב ש$b > \sqrt{b^2 - \omega^2}$. ולכן $-b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} < 0$.
לכן $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.
לכן כש$t \to \infty$ $y \to 0$.
כלומר, ככל שמתקדמים עם הזמן הגוף חוזר למקום שבו הוא התחיל, נקודת ה0. והוא לא חוצה אף פעם את נקודת ההתחלה. הוא מתקדם בקו ישר מהנקודה שאליה מתחנו את הקפיץ אל נקודת ההתחלה.
2.

$$y = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}$$

$-b < 0$. התנועה נראית באותה צורה כמו המקרה הראשון, הגוף הולך ומתקרב אל נקודת ההתחלה ככל שהזמן מתקדם והוא אף פעם לא יחצה אותה.
ההבדל מהמקרה הקודם זה שעכשיו הגוף יתקדם יותר לאט.
3.

$$y = c_1 e^{-bt}\cos((\sqrt{b^2 - \omega^2})t) + c_2 e^{-bt}\sin((\sqrt{b^2 - \omega^2})t)$$

$$\alpha + \beta i, \alpha - \beta i$$

$$c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

במקרה הזה הגוף כן ינוע לפני ואחרי נקודת ההתחלה, אבל בגלל שלקוסינוס וסינוס יש מקדם e^{-bt} שקטן עם הזמן, אז התנודות הולכות וקטנות, והגוף מתקרב לנקודת ה0 מימין ומשמאל לה.

מד"ר לינארית מסדר שני עם מקדמים קבועים- לא הומוגני

אנחנו מתמקדים במקרה

$$ay'' + by' + cy = \text{polinom}$$

נסמן בy_h את הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית המתאימה, כלומר של

$$ay'' + by' + cy = 0$$

נסמן בy_p איזשהו פתרון פרטי של המד"ר הלא הומוגנית.
אז הפתרון הכללי של המד"ר הלא הומוגנית הוא

$$y = y_h + y_p$$

אנחנו צריכים למצוא פתרון אחד של המד"ר הלא הומוגנית.
נכתוב פולינום כללי מאותה דרגה של הפולינום הנתון, ונחשב את הנגזרות שלו, ונציב במד"ר על מנת לגלות מי מקדמי הפולינום.
דוגמא: $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$
פתרון:

$$y = y_h + y_p$$

הפתרון של ההומגונית: $y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$
פולינום כללי ממעלה שניה: $y_p = ax^2 + bx + c$
$y_p' = 2ax + b$
$y_p'' = 2a$
נציב בתרגיל:

$$2a - 3(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2$$

צד ימין וצד שמאל הם פולינום, אז משווים מקדמים.

$$x^2 : -4a = 4$$

$$x : -6a - 4b = 0$$

$$x^0 : 2a - 3b - 4c = 0$$

$a = -1$
$b = 1.5$
$c = -\frac{13}{8}$
פתרון פרטי: $y_p = -x^2 + 1.5x - \frac{13}{8}$
ולכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - x^2 + 1.5x - \frac{13}{8}$$

אם יש תנאי התחלה מציבים אותו בסוף, בפתרון הכללי של המד"ר הלא הומוגנית.
דוגמא נוספת: $y'' - 3y' - 4y = 4x + 2$
את ההומוגנית כבר פתרנו.
נמצא פתרון פרטי.
נציב פולינום כללי ממעלה 1: $y_p = ax + b$
$y_p' = a$
$y_p'' = 0$

$$-3a - 4(ax + b) = 4x + 2$$

$$-4a = 4$$

$$-3a - 4b = 2$$

$a = -1, b = \frac{1}{4}$
$y_p = -x + \frac{1}{4}$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - x + \frac{1}{4}$$

נזכיר איך פותרים את ההומוגנית.
הפולינום האופייני הוא $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ השורשים שלו הם $4, -1$. שני שורשים ממשיים שונים,
ולכן הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא

$$y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$