מד"ר - תרגול 10

21 בינואר 2014

התמרות לפלס

נוסחאות שבהן נשתמש במהלך התרגול

1. $L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$
2. $L(cosat) = \frac{s}{s^2+a^2}$
3. $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
4. $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
5. $L\left(f'(t)\right) = sL(f(t)) - f(0)$
6. $L(e^{at}f(t)) = L\left(f(t)\right)(s-a)$

טבלה מורחבת

דוגמה 1: מצא את המקור של $g(s) = \frac{1}{s^2+10s+41}$

פתרון:

נעשה השלמה לריבוע:

$$g(s) = \frac{1}{s^2+10s+41} = \frac{1}{(s+5)^2+16} \xleftarrow{\textbf{formulas (1) and (6)}} \frac{1}{4}e^{-5t}\sin(4t)$$

דוגמה 2: מצא את התמרת לפלס של $f''(t)$.

פתרון:

$$L\left(f''(t)\right) \underset{(5)}{=} sL\left(f'(t)\right) - f'(0) = \underset{(5)}{=} s^2L\left(f(t)\right) - sf(0) - f'(0)$$

הערה:

עבור $n \in \mathbb{N}$ כללי נקבל:

$$L\left(f^{(n)}(t)\right) = s^nL\left(f(t)\right) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

דוגמה 3: מצא את המקור של $g(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+10}$.

פתרון:

$$\frac{s+3}{s^2+2s+10}=\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+3^2}=\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{2}{(s+1)^2+3^2}\longleftarrow e^{-t}\cos(3t)+\frac{2}{3}e^{-t}\sin(3t)$$

דוגמה 4: פתור את המד"ר הבאה באמצעות התמרות לפלס: $\begin{cases}\ddot{x}+2\dot{x}+5x=\sin t\\ x(0)=1\\ \dot{x}(0)=2\end{cases}$.

פתרון: נעשה התמרת לפלס ל2 הצדדים:

$$\begin{aligned}L(x(t)) &= X(s)\\ s^2x(s)-sx(0)-x\prime(0)+2sx(s)-2x(0)+sx(s) &= \frac{1}{s^2+1}\\ (s^2+2s+5)x(s) &= \frac{1}{s^2+1}+s+4=\frac{1+s^3+s+4s^2+4}{s^2+1}\\ x(s) &= \frac{s^3+4s^2+s+5}{(s^2+2s+5)(s^2+1)}\end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקים:

$$\begin{aligned}x(s) &= \frac{as+b}{s^2+2s+5}+\frac{cx+d}{s^2+1}\\ s^3+4s^2+s+5 &= as^3+bs^2+as+b+cs^3+2cs^2+5cs+ds^2+2ds+5d\end{aligned}$$

$$\begin{cases}a+c=1\\ b+2c+d=4\Rightarrow 5+2c-4d=4\Rightarrow 2c=4d-1\\ a+5c+d=1\\ b+5d=5\Rightarrow b=5-5d\end{cases}$$

$$c=2d-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}a+2d=\frac{3}{2}\\ a+10d-2.5+2d=1\Rightarrow a+12d=\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}10d &= 2\\ d &= 0.2\Rightarrow a=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{11}{10}\\ c &= \frac{2}{5}\\ b &= 5-1=4\end{aligned}$$

$$x(s) = \frac{\frac{11}{10}s+4}{s^2+2s+5} + \frac{\frac{-1}{10}s+\frac{1}{5}}{s^2+1}$$

$$x(s) = \frac{11}{10}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{29}{20}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

ולכן נקבל:

$$x(t) = \frac{11}{10}e^{-t}\cos(2t) + \frac{29}{20}e^{-t}\sin(2t) - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$$

דוגמה 5:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t)+4\dot{x}(t)+4x(t)=e^{5t}+\sin(4t) \\ x(0)=\dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

פתרון:

$L(x(t)=x(s)$. נקבל:

$$\begin{aligned}
s^2x(s)+4sx(s)+4x(s)+4x(s) &= \frac{1}{s-5}+\frac{4}{s^2+4^2} \\
(s^2+4s+4)x(s) &= \frac{1}{s-5}+\frac{4}{s^2+4^2} \\
x(s) &= \frac{1}{(s-5)(s+2)^2}+ \\
&\quad +\frac{4}{(s+2)^2(s^2+4^2)} \\
x(s) &= \frac{a}{s-5}+\frac{bs+c}{s^2+16}+ \\
&\quad +\frac{d}{(s+2)^2}+\frac{e}{s+2} \\
(s^2+16)(s^2+4s+4)+4(s-5)(s^2+4s+4) &= a(s^2+16)(s+2)^2+ \\
&\quad (bs+c)(s^2+4s+4)(s-5)+ \\
&\quad d(s^2+16)(s-5)+ \\
&\quad e(s+2)(s^2+16)(s-5) \\
s^4+4s^3+4s^2+16s^2+64s+64+4s^3+16s^2+16s-5s^2-20s-20 &= as^4+4as^3+4as^2+16as^2+ \\
&\quad 64as+64a+bs^4-5bs^3+cs^3 \\
&\quad 5cs^2+4bs^3-20bs^2+ \\
&\quad 4cs^2-20cs+4bs^2+4cs+\ldots
\end{aligned}$$

[ניתן לפתח את ההמשך ב$MuPAD$]. השאלה בדרך הזאת ארוכה ועדיף לפתור בדרך הרגילה.
בדרך הרגילה נקבל:
הומוגנית:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}+4\dot{x}+4x &= 0\\
r^2+4r+4 &= 0\\
r &= -2\\
x_n(t) &= e^{-2t}(c_1+c_2t)
\end{aligned}
$$

לא הומוגנית: ננחש פתרון פרטי מהצורה:

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= ae^{5t}+b\sin(4t)+c\sin(4t)\\
\dot{x_p}(t) &= 5ae^{5t}+4b\cos 4t-4c\sin 4t\\
\ddot{x}_p(t) &= 25ae^{5t}-16b\sin 4t-16c\cos 4t\\
49ae^{5t}+\sin 4t\,(-16b-16c+4b)+\cos 4t(-16c+16b+4c) &= e^{5t}+\sin 4t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
49a=1\Rightarrow a=\frac{1}{49}\\
-12b-16c=1\\
12c-16b=0\Rightarrow c=\frac{-4}{3}b
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
-3b+\frac{16}{3}b &= 1\\
\frac{7}{3}b=1 &\Rightarrow b=\frac{3}{7},c=-\frac{4}{7}\\
x(t) &= x_h(t)+x_p(t)=e^{-2t}(c_1+c_2t)+\frac{1}{49}e^{5t}+\frac{3}{7}\sin 4t-\frac{4}{7}\cos 4t
\end{aligned}
$$

נציב תנאי התחלה:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= c_1+\frac{1}{49}-\frac{4}{7}=0\Rightarrow c_1=\frac{27}{49}\\
\dot{x}(t) &= -2e^{-2t}(c_1+c_2t)+c_2e^{-2t}+\frac{5}{49}e^{5t}+\frac{12}{7}\cos 4t-\frac{16}{7}\sin 4t\\
\dot{x}(0) &= -\frac{54}{49}+c_2+\frac{5}{49}+\frac{12}{7}=0\\
c_2 &= \frac{54-5-84}{49}=\frac{-5}{7}
\end{aligned}
$$