נוסחאות נסיגה

פתרון נוסחאות נסיגה הומוגניות

נתבונן בנוסחת נסיגה: $a_n = p_1a_{n-1} + p_2a_{n-2} + ... + p_ra_{n-r} + b_n$, כאשר $p_1, p_2, ..., p_r, r$ הם קבועים ואילו b_n היא תוספת תלויה ב-n. נוסחא כזו נקראת נוסחת נסיגה ליניארית עם מקדמים קבועים מסדר r. אם $b_n = 0$ - משוואת נקראת הומוגנית.

דוגמא: נוסחת נסיגה: $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, a_2 = a_3 = 7$ אינה נוסחא ליניארית.
דוגמא: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 7, a_2 = 0, a_3 = 2$ - ליניארית לא הומוגנית.

לפתרון נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית מסדר 2 נשתמש בטענה הבאה:
טענה: הפתרון של נוסחת הנסיגה $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ הוא מהצורה $a_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$, כאשר λ, μ הם שורשי המשוואה הריבועית: $t^2 - pt - q = 0$.
(הפולינום $t^2 - pt - q = 0$ נקרא הפולינום האופייני של נוסחת נסיגה)

במקרה ש- $\lambda = \mu$, הפתרון יהיה מהצורה: $a_n = \alpha\lambda^n + \beta n\mu^n$.

הערה: את המקדמים α, β נמצא על ידי פתרון מערכת ההשוואות: $\begin{cases} \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0 = a_0 \\ \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1 = a_1 \end{cases}$.

תרגיל: פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},\ a_0 = a_1 = 1$.
פתרון: נפתור את המשוואה $t^2 - t - 2 = 0$, נקבל: $\lambda, \mu = 2, -1$. לכן, צורת הפתרון הכללית היא $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n$. כדי למצוא את α, β, נציב $n = 0,1$: $\begin{cases} \alpha \cdot 2^0 + \beta \cdot (-1)^0 = a_0 = 1 \\ \alpha \cdot 2^1 + \beta \cdot (-1)^1 = a_1 = 1 \end{cases}$, לכן: $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases}$,
מכאן $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$. לסיכום: $a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$.

תרגיל: פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_0 = 1, a_1 = 2$.
פתרון: נפתור את המשוואה $t^2 - t - 1 = 0$, נקבל: $\lambda, \mu = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. לכן, צורת הפתרון הכללית היא $a_n = \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. כדי למצוא את α, β, נציב $n = 0,1$:

$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+\beta\cdot\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=2\end{cases}$, לכן: $\begin{cases}\alpha=1-\beta\\ (1-\beta)\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+\beta\cdot\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=2\end{cases}$. נפתור ונקבל:

$\alpha=1-\beta=\frac{\sqrt5+3}{2\sqrt5}$, $\beta=\frac{\sqrt5-3}{2\sqrt5}$. ובסה"כ: $a_n=\frac{\sqrt5+3}{2\sqrt5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\frac{\sqrt5-3}{2\sqrt5}\cdot\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$.

<u>פתרון נוסחאות נסיגה לא הומוגניות</u>

פתרון של נוסחת הנסיגה הלא הומוגנית מורכב ממחובר שצורתו כמו של הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה וממחוברים נוספים שצורתם כצורת המרכיבים הלא הומוגניים.
יותר מדויק – אם בנוסחא מופיע תוספת מהצורה $\lambda^n\cdot p(n)$ כאשר $p(n)$ פולינום, בפתרון יופיע מחובר $\lambda^n\cdot q(n)$ וזאת אם λ אינו שורש של פולינום אופייני של המשוואה ההומוגנית. ואילו הוא שורש בריבוי r של הפולינום האופייני, יהיה המחובר המתאים מהצורה: $\lambda^n\cdot n^r\cdot q(n)$.
בשני מקרים סדר של פולינום $q(n)$ זהה לזה של הפולינום $p(n)$.

<u>תרגיל</u>: $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+2\cdot3^{n-2},\ a_0=1,\ a_1=2$.
<u>פתרון</u>: הנוסחא ההומוגנית המתאימה היא $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ ששורשים של הפולינום האופייני הם $2,-1$.
התוספת הלא הומוגנית $\frac{2}{9}\cdot3^n$. מכיון ש- 3 אינו שורש של הפולינום האופייני אזי בפתרון של הנוסחא הלא הומוגנית מצפים למחובר מהסוג $\gamma\cdot3^n$.
נחפש את γ על ידי סימון $a_n=\gamma\cdot3^n$ ונציב בנוסחת נסיגה מקורית:

$$\gamma\cdot3^n=\gamma\cdot3^{n-1}+2\gamma\cdot3^{n-2}+2\cdot3^{n-2}\Rightarrow_{:3^{n-2}}\Rightarrow9\gamma=3\gamma+2\gamma+2\Rightarrow\gamma=0.5.$$

צורת הפתרון של נוסחת נסיגה הומוגנית $a_n=\alpha\cdot2^n+\beta\cdot(-1)^n$, הפתרון של הנוסחא הלא הומוגנית יהיה $a_n=\alpha\cdot2^n+\beta\cdot(-1)^n+0.5\cdot3^n$. כדי למצוא את α,β, נציב $n=0,1$: $\begin{cases}\alpha+\beta+0.5=1\\ \alpha\cdot2^1+\beta\cdot(-1)^1+1.5=2\end{cases}$, מכאן $\alpha=\frac{1}{3},\beta=\frac{1}{6}$. לסיכום: $a_n=\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{6}(-1)^n+\frac{1}{2}3^n$.

<u>תרגיל</u>: $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+n+1,\ a_0=1,\ a_1=3$.
<u>פתרון</u>: התוספת הלא הומוגנית $1^n\cdot(n+1)$. מכיון ש- 1 אינו שורש של הפולינום האופייני אזי בפתרון של הנוסחא הלא הומוגנית מצפים למחובר מהסוג $1^n\cdot(\gamma\cdot n+\delta)$. נחפש את γ,δ על ידי סימון $a_n=1^n\cdot(\gamma\cdot n+\delta)$ ונציב בנוסחת נסיגה מקורית:

$$(\gamma\cdot n+\delta)=(\gamma\cdot(n-1)+\delta)+(\gamma\cdot(n-2)+\delta)+(n+1)\Rightarrow(2\gamma+1)\cdot n+(2\delta-5\gamma+1)=0.$$

כיוון ש- $n\neq0$ והביטוי נכון לכל n - $\begin{cases}2\gamma+1=0\\ 2\delta-5\gamma+1=0\end{cases}$, ולכן $\gamma=-\frac{1}{2},\ \delta=-\frac{7}{2}$.

צורת הפתרון של נוסחת נסיגה הומוגנית $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot(-1)^n$, הפתרון של הנוסחא הלא הומוגנית יהיה $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot(-1)^n-\frac{1}{2}n-\frac{7}{4}$. כדי למצוא את α,β, נציב $n=0,1$: $\begin{cases}\alpha+\beta-\frac{7}{4}=1\\ 2\alpha-\beta-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}=3\end{cases}$, מכאן $\alpha=\frac{1}{3},\beta=\frac{1}{6}$. לסיכום: $a_n=\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{6}(-1)^n+\frac{1}{2}3^n$.

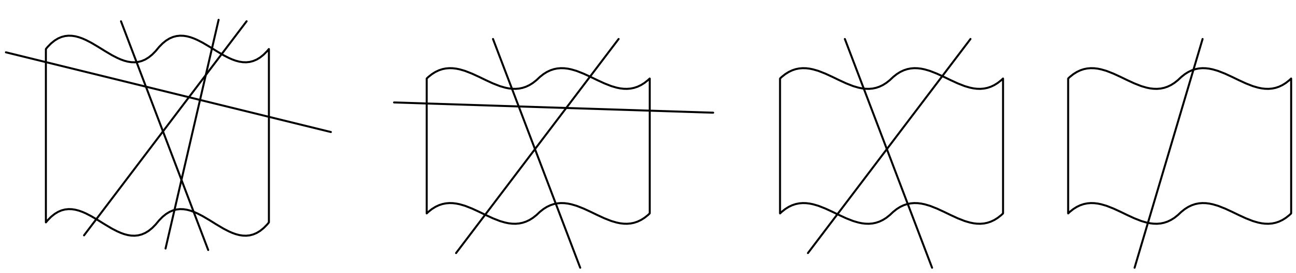
<u>תרגיל</u>: $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+2^{n-1},\ a_0=1,\ a_1=3$.

<u>פתרון</u>: התוספת הלא הומוגנית $\frac{1}{2}\cdot 2^n$. 2 הוא שורש של הפולינום האופייני אזי בפתרון של הנוסחא הלא הומוגנית מצפים למחובר מהסוג $\gamma\cdot n\cdot 2^n$.
נחפש את γ על ידי סימון $a_n=\gamma\cdot n\cdot 2^n$ ונציב בנוסחת נסיגה מקורית:

$$\gamma\cdot n\cdot 2^n=\gamma\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1}+2\gamma\cdot(n-2)\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}\Rightarrow_{:2^{n-1}}\Rightarrow 2n\cdot\gamma=\gamma(n-1)+\gamma(n-2)+1\Rightarrow\gamma=\frac{1}{3}.$$

צורת הפתרון של נוסחת נסיגה הומוגנית $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot(-1)^n$, הפתרון של הנוסחא הלא הומוגנית יהיה $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot n\cdot 2^n$. כדי למצוא את α,β, נציב $n=0,1$: $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ 2\alpha-\beta+\frac{2}{3}=3\end{cases}$, מכאן $\alpha=\frac{10}{9},\beta=-\frac{1}{9}$. לסיכום: $a_n=\frac{10}{9}2^n-\frac{1}{9}(-1)^n+\frac{1}{3}2^n\cdot n$.

<u>תרגיל</u>: כידוע קו ישר מחלק את המישור לשני אזורים נפרדים. שני קווים ישרים (בתנאי שהם חותכים זה את זה, מחלקים את המישור ל- 4 אזורים נפרדים. יהי a_n מספר האזורים הנפרדים במישור המחולק ע"י n ישרים, כך שכל זוג ישרים חותכים זה את זה ואין 3 ישרים שנחתכים בנקודה אחת. מצר נוסחת נסיגה ל- a_n ומצא את הביטוי המפורש (עם תנאי התחלה מתאימים).



11 7 4 2

<u>פתרון</u>: ניתן להסתכל על n ישרים כ- n-1 ישרים ועוד ישר אחד. הישר החדש מפצל כל אזור שהוא עובר בו לשניים. השאלה היא כמה אזורים עברנו?
יש n תחומים כאלה! למה? <u>הסבר</u>: נניח שיש n-1 ישרים. הישר החדש צריך לחתוך את כל אחד מהישרים הקיימים. לכן נוצרים n-1 נקודות חיתוך. נקודות החיתוך נמצאות על ישרים וכל נקודת חיתוך נמצאת בין שני אזורים (שייכת לשפה של שני אזורים). לכן, אם יש n-1 נק' חיתוך אז יהיו n

אזורים שיעבור הישר החדש. הישר פיצל כל אחד מ-n אזורים לשניים, כלומר הוסיף עוד n אזורים חדשים. כך נוסחת נסיגה: $a_n = a_{n-1} + n$, כאשר תנאי התחלה הוא $a_0 = 1$ (אם אין ישרים, אז יש מישור שלם אחד).

באופן כללי:

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots =$$
$$a_0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + \frac{(1+n)\cdot n}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

<u>תרגיל</u>: רשום נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים לתיאור מספר תתי הקבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. למשל, תתי הקבוצות של $\{1,2\}$ המקיימות תכונה זו הן: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$.

<u>פתרון</u>:

נסמן את מספר תתי הקבוצות של $\{1,2,\ldots,n\}$ בהן אין אף זוג מספרים עוקבים כ- $f(n)$. נשים לב שתת-הקבוצות האלו מתחלקות לשתי קבוצות:

(i). תתי קבוצות בהן האיבר n אינו מופיע - אילו בדיוק כל הקבוצות החוקיות עבור $\{1,2,\ldots,n-1\}$ ולכן מספרן $f(n-1)$.

(ii). תתי הקבוצות בהן האיבר n מופיע (ולכן $n-1$ בהכרח אינו מופיע) – אלו בדיוק כל הקבוצות החוקיות עבור $\{1,2,\ldots,n-2\}$ כאשר מוסיפים לכולן את האיבר n ולכן מספרן $f(n-2)$.

לכן מתקבל כלל הנסיגה: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ עבור $n \geq 3$. תנאי ההתחלה הם: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$.