תורת הקבוצות — תרגיל בית 9
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

ח' בתמוז, תשע"ה*

תקציר

אקסיומת הבחירה ושקולים.

תזכורות

1. פונקציית בחירה: תהי $\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות לא ריקות. פונקציה $f:\mathcal{F}\to\bigcup\mathcal{F}$ תיקרא פונקציית בחירה ב־$\mathcal{F}$ אם לכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $f\left(A\right)\in A$.
2. אקסיומת הבחירה: תהי $\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות לא ריקות. אזי קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{F}$.
3. מערכת אקסיומות ZF היא מערכת האקסיומות שראינו כבר, בתרגיל בית 7, למעט אקסיומת הבחירה.
4. ב־ZF ניתן להראות כי כל אחד מהבאים שקול לאקסיומת הבחירה:
   (א) עקרון הסדר הטוב. לכל קבוצה A קיים סדר טוב R עליה.
   (ב) הלמה של צורן. בקבוצה סדורה חלקית אשר לכל שרשרת בה יש חסם מלעיל, יש איבר מקסימלי אחד לפחות.
   (ג) טריכוטומיות של מונים: תהיינה A,B קבוצות. אזי קיימת פונקציה חח"ע מאחת מהן אל האחרת.

1 תרגילים

בתרגילים הבאים נציין מתי יש לעבוד ב־ZF ומתי ב־ZFC.

1. (ZF). נסחו, במפורש, פונקציית בחירה על הקבוצות הבאות: $\mathcal{P}\left(3\right)\backslash\left\{0\right\}$, $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\backslash\left\{0\right\}$, $\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)\setminus\left\{0\right\}$. שימו לב שהתרגיל הופך לבלתי אפשרי כשעוברים ל־$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\left\{0\right\}$.

---

* להגשה עד יום חמישי ח' בתמוז (25 יונ') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

פתרון נראה רק עבור $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\setminus\{0\}$; שאר הקבוצות בשאלה מוכלות בה, ולכן ניתן לצמצם את הפונקציה שנגדיר כאן גם עבורן. תהי $A\in\mathcal{P}(\mathbb{Q})\setminus\{0\}$. אזי A קבוצת רציונליים לא ריקה. נציג כל אחד מאיבריה באופן יחיד בצורת שבר מצומצם $p\cdot\frac{m}{n}$ כאשר p הוא הסימן ($p=\pm1$), ו־m ו־n הם שני טבעיים. נחפש את המכנה המינימלי ב־A: $n_0=\min\left\{n\colon p\cdot\frac{m}{n}\in A\right\}$. הוא מוגדר היטב כי הקבוצה האמורה היא קבוצת טבעיים לא ריקה. לאחר מכן, נחפש מונה מינימלי, $m_0=\min\left\{m\colon p\cdot\frac{m}{n_0}\in A\right\}$. נותרנו כעת עם איבר אחד או שנים. נבחר מתוך אלו את האיבר הקטן יותר: $p_0=\min\left\{p\cdot\frac{m_0}{n_0}\in A\right\}$. אם כן, בחרנו את $p_0\cdot\frac{m_0}{n_0}\in A$ מתוך A. פונקציה זו מוגדרת היטב, כי בכל שלב לקחנו מינימום מקבוצה סדורה היטב לא ריקה. נסמן פונקציה זו על ידי f, ואז מתקיים

$$\forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{Q})\setminus\{0\}, f(A)\in A$$

ולפיכך מצאנו כאן פונקצית בחירה. ■

2. (ZF). נניח כי $\mathcal{F}$ היא קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות. קבוצה בוחרת S על $\mathcal{F}$ היא קבוצה המקיימת:

- $S\subseteq\bigcup\mathcal{F}$.
- $\forall A\in\mathcal{F}, |S\cap A|=1$.

הראינו בכיתה כי אקסיומת הבחירה גוררת את עקרון הסדר הטוב, ועקרון הסדר הטוב גורר את הטענה שלכל קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות $\mathcal{F}$ יש קבוצה בוחרת S. הראו כי קיום קבוצה בוחרת גורר את אקסיומת הבחירה, ובכך תשלימו את הוכחת השקילות של שלוש טענות אלו.

פתרון תהי $\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות לא ריקות. נראה כי קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{F}$. אם $\mathcal{F}$ ריקה, אז הפונקציה הריקה היא פונקציית בחירה עליה. אחרת, $\mathcal{F}$ היא קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות, ולפי ההנחה שלנו יש עליה קבוצה בוחרת S. נגדיר $f\colon\mathcal{F}\to\bigcup\mathcal{F}$ כדלהלן: $f(A)=\bigcup(S\cap A)$. ברור שזה יחס חד־ערכי המוגדר על כל התחום. ראשית נראה כי תמונתו חלקית לטווח, ולכן f פונקצייה. נוסיף ונראה כי לכל $A\in\mathcal{F}$, $f(A)\in A$, ולכן זו פונקציית בחירה כנדרש.
נראה כי תמונת f חלקית לטווח $\bigcup\mathcal{F}$. יהי $A\in\mathcal{F}$ מהתחום. אנו רוצים להראות $\bigcup(S\cap A)\in\bigcup\mathcal{F}$. לפי הנתון, $S\cap A$ הוא נקודון, נסמנו $\{x\}$. אז $\bigcup(S\cap A)=\bigcup\{x\}=x$. נותר להראות $x\in\bigcup\mathcal{F}$. נסיק מהנתון כי $x\in A\in\mathcal{F}$, ולכן $x\in\bigcup\mathcal{F}$. אם כן, f פונקצייה כפי שהובטח.
כעת נוכיח ש־f היא אכן פונקציית בחירה. יהי A מהתחום, שוב נסמן את הנקודון $S\cap A$ על ידי $\{x\}$. אזי $f(A)=\bigcup(S\cap A)=x\in S\cap A\subseteq A$. ■

3. (ZF). הראו כי אקסיומת הבחירה שקולה לאחת משלוש הטענות הבאות:

- לכל חבורה G קיים סדר טוב עליה.[1]

[1] אין קשר לחבורה סדורה, שהיא חבורה שפעולתה מכבדת את יחס הסדר שלה. השאלה היא האם ברור שקיים סדר טוב על הקבוצה G שעליה מוגדר מבנה של חבורה.

- לכל חוג R קיים סדר טוב עליו.
- לכל שדה F קיים סדר טוב עליו.

פתרון כידוע, שדה הוא מקרה פרטי של חוג, חוג הוא מקרה פרטי של חבורה, וחבורה הוא מקרה פרטי של קבוצה. לכן עקרון הסדר הטוב גורר את כל אלה, ומספיק להראות שהתכונה לכל שדה גוררת את עקרון הסדר הטוב.
עבור שדה F נגדיר את חוג הפולינומים בקבוצת משתנים X להיות סכום סופי של מכפלות סופיות של איברי X (חזרות מותרות) כאשר לכל מכפלה כזו יש מקדם מהשדה F:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j \in J} x_j^{m_{ij}}$$

כאשר $\lambda_i \in F$, J_i היא קבוצת אינדקסים של $X = \{x_j \colon j \in J\}$, והחזקות $m_{ij} \in \omega$, $|\{(i,j) \in S(n) \times J \colon m_{ij} \neq 0\}| < \omega$.[2] הסימון הוא $F[X]$. שדה הפונקציות הרציונליות בקבוצת משתנים X[3] הוא השדה

$$F(X) = \left\{ \frac{f}{g} \colon f, g \in F[X], g \neq 0 \right\}$$

תהי X קבוצה. נביט בשדה הפונקציות הרציונליות $\mathbb{Z}_2[X]$. לפי ההנחה הוא שדה סדור היטב. בפרט, קבוצת הפולינומים $\left\{1x_j^1 \colon j \in J\right\}$ היא קבוצה סדורה היטב. נתאים אותה לקבוצה X, וסיימנו. ■
יש הוכחות ישירות למקרים של חבורה וחוג, בעזרת חבורת הסימטריה S_X ובעזרת חוג הפולינומים $R[X]$.

4. (ZFC). קבוצה A נקראת סופית אם יש פונקציה חח"ע ממנה ל־ω, אך אין פונקציה חח"ע בכיוון ההפוך. קבוצה אינסופית היא קבוצה שאיננה סופית. תהי A קבוצה אינסופית. אזי קיימת לה תת־קבוצה ממש $B \subsetneq A$ שקולת עוצמה ל־A (קיימות פונקציות חח"ע מכל אחת מהן לאחרת).

פתרון לפי עקרון הסדר הטוב, קיים ל־A סדר טוב $<$. נסמן את האיבר הראשון של A על ידי a_0 ונגדיר $B = A \setminus \{a_0\}$. נראה קיום פונקציה חח"ע ועל בין שתי קבוצות אלו:

$$f(x) = \begin{cases} \max\left(\overset{x}{A}\right) & \overset{x}{A} \text{ is finite} \\ x & \overset{x}{A} \text{ is infinite} \end{cases}$$

זו פונקציה מ־B ל־A המעבירה כל איבר מהרישא מטיפוס ω של B לקודם לו ב־A, ואת שאר האיברים, אלו שלהם רישא אינסופית, לעצמם. בבירור, פונקציה זו היא חח"ע ועל, ולכן A שקולת עוצמה ל־B. ■

[2] במילים: רק מספר סופי של חזקות איננו אפס. בגלל תנאי זה, אין לנו צורך באקסיומת הבחירה כדי לבנות פולינום כזה, כי כל פולינום ניתן לייצוג כסדרה סופית של איברי F, X ו־ω.

[3] קבוצה זו מוגדרת ללא אקסיומת הבחירה. נמקו באילו אקסיומות השתמשנו כדי לבנות אותה!

הגדרה קבוצה A נקראת אינסופית על פי דדקינד אם קיימת לה תת־קבוצה ממש $B \subsetneq A$ שקולת עוצמה ל־A. הראינו כי קבוצה אינסופית היא אינסופית על פי דדקינד. הכיוון ההפוך, כל קבוצה אינסופית דדקינד היא אינסופית, אינו תלוי באקסיומת הבחירה; ל־ZF יש מודל בו יש קבוצות סופיות דדקינד שהן אינסופיות במובן הרגיל.

ב ה צ ל ח ה!