תרגיל 2

5 בנובמבר 2015

1. נתונות הקבוצות הבאות:

$$\begin{array}{rclrclrcl} X_3 & = & \{a,\{\{a\}\}\} & X_2 & = & \{a,\{a\}\} & X_1 & = & \{\{a\}\} \\ X_6 & = & \{a,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\} & X_5 & = & \{a,\{a\},\{\{a\}\}\} & X_4 & = & \{\{a\},\{\{a\}\}\} \end{array}$$

אלו מהטענות הבאות נכונות:

א. $X_2 \in X_3$

ב. $X_2 \subseteq X_3$

ג. $X_2 \in X_6$

ד. $X_2 \subseteq X_4$

ה. $X_3 \subseteq X_5$

ו. $X_4 \subseteq X_6$

ז. $X_3 \in X_6$

ח. $X_3 \subseteq X_6$

פיתרון

ג. נכון ה. נכון ו. נכון ח. נכון כל השאר לא נכון.

2. מצאו קבוצות A, B, C המקיימות את התנאים הבאים:

א. $A \cup B \subseteq A \cup C$ אבל $B \not\subseteq C$.

ב. $A \cap B \subseteq A \cap C$ אבל $B \not\subseteq C$.

פיתרון

א. $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{3\}$

ב. $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$

3. הוכיחו שלכל A, B, C קבוצות מתקיים:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

פיתרון:

$(\subseteq)$**:** יהי $x \in A \cup (B \cap C)$ אזי

$$x \in A \text{ or } x \in (B \cap C) \quad \Rightarrow \quad x \in A \text{ or } \ (x \in B \text{ and } x \in C)$$

כעת יש שני מקרים: אם $x \in A$ אזי $x \in A \cup B \text{ and } x \in A \cup C$ ולכן נמצא בחיתוך שזה צד ימין של המשוואה. אם $x \in B \text{ and } x \in C$ אזי $x \in A \cup B \text{ and } x \in A \cup C$ ולכן נמצא בחיתוך שזה צד ימין של המשוואה.

$(\supseteq)$**:** יהי $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ אזי $x \in A \cup B$ וגם $x \in A \cup C$. באופן כללי יש שני מקרים או ש $x \in A$ או שלא. אם $x \in A$ הוא בצד שמאל וסיימנו. אחרת $x \notin A$, מחיבור עם הנתון נסיק כי $x \in C$ (כי הוא נמצא ב $x \in A \cup C$ ולא ב A) וגם $x \in B$ ולכן $x \in B \cap C$ ולכן שייך לצד שמאל של המשוואה וסימנו.

4. הוכיחו:

$$\{2n+5|n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$$

פיתרון

נשתמש בהכלה דו־כיוונית.

לכיוון אחד, יהי $x \in \{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו: $x = 2n+5$.

לכן: $x = 2(n-2)+9$. מכיוון ש־$n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n-2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9|n \in \mathbb{Z}\} \supseteq \{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$$

לכיוון השני, יהי $x \in \{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו $x = 2n+9$.

לכן: $x = 2(n+2)+5$. מכיוון ש־$n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n+2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9|n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$$

ולכן סה"כ לפי הכלה דו־כיוונית נקבל:

$$\{2n+5|n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$$