תרגיל 5

1. תהי (X,τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה. תזכורת: בתרגיל הקודם הוכחתם את סעיף (a).

(א) תהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהמקרים הבאים:

i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר בX.

פתרון. נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת ואין לה גבול יחיד. נניח כי $x' \neq x''$ גבולות שלה. נקבל כי לכל איבר $a \in X$ קיים מיקום n_a שהחל ממנו הסדרה שונה מ a. הוכחה: יהא $a \in X$ אזי $\{a\}^c$ הוא סביבה פתוחה של x' או x'' ולכן לפי הגדרת הגבול החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה נמצאים ב $\{a\}^c$ כלומר לא שווים ל a. כעת נוכיח כי כל $x \in X$ הוא גבול שלה. יהא $x \in X$ נתון ויהא U סביבה פתוחה של x. לפי הגדרת הטופולוגיה U^c סופי ולכן נוכל להגדיר $N = \max\{n_a | a \in U^c\}$ ולקבל כי החל ממיקום N איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים מכל איברי U^c ולכן בפרט ממקום זה איברי $\{x_n\}$ שייכים ל U כנדרש.

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו שf קבועה.

פתרון. נבחר תת קבוצה $\{x_n\}$ מעוצמה $\aleph_0$ ש ל X. טענה: $\{x_n\}$ כסדרה מתכנסת לכל איבר ב X. הוכחה: יהא $x \in X$ ותהא U סביבה פתוחה של x. מהגדרה U^c סופית ולכן ממקום כלשהוא בסדרה , איברי הסדרה$\{x_n\}$ נמצאים ב U כנדרש. כעת אם $x_n \to x$ אזי $f(x_n) \to f(x)$ כיוון ש f רציפה. כיוון שכל $x \in X$ הוא גבול של הסדרה $\{x_n\}$ נקבל כי כל $x \in X$ מקיים כי $f(x)$ הוא גבול של הסדררה $\{f(x_n)\}$. במרחב מטריזבילי הגבול יחיד ל $\{f(x_n)\}$ גבול יחיד שנסמנו y ומכאן נקבל שכל $x \in X$ מקיים $f(x) = y$.

(ג) הוכיחו ש(X,τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

פתרון. במקרה ש X סופית אזי הטופולוגיה הקו-סופית מתלכדת עם הטופלוגיה הדיסקטית שהיא מטרזבילית. במקרה שלנו, X אינה סופית ונוכיח כי הוא אינו מטרזבילי. נניח בשלילה כי הוא מטרזבילי אזי $Id : X \to X$ רציפה ואינה קבועה. סתירה לסעיף הקודם.

.

2. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

פתרון. נניח כי $f:X\to Y, g:Y\to Z$ רציפות (X,Y,Z מרחבים טופולוגיים). יהא U פתוחה ב Z ונרצה להוכיח כי $\left(g\circ f\right)^{-1}(U)$ פתוחה ב X אכן $g^{-1}(U)$ פתוחה ב Y כי g פתוחה ואז $f^{-1}(g^{-1}(U))$ פתוחה ב X כי f רציפה. כיוון ש

$$\left(g\circ f\right)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$$

סיימנו.

3. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A,B,C\subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C\subseteq A\cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A\cup B$ אז $A\cap C$ פתוחה ב A ו $B\cap C$ פתוחה ב B.

פתרון. נכון. אם C פתוחה ב $A\cup B$ אז $A\cap C$ פתוחה ב A פשוט לפי הגדרה של טופולוגית תת מרחב. כנ"ל $B\cap C$ פתוחה ב B.

i. אם $A\cap C$ פתוחה ב A ו $B\cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A\cup B$.

פתרון. לא. ניקח $X=\mathbb{R}$ ו $A=C=\{0\}$ אז $A\cap C$ פתוחה ב A. ניקח $B=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ אז $B\cap C=\emptyset$ פתוחה אבל $\{0\}$ לא פתוחה ב $A\cup B=\mathbb{R}$

4. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $X\subseteq Y\subseteq Z$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

פתרון. נכניס סימונים כאלה: τ היא הטפולוגיה של X. τ_Y ו τ_Z הן טפולוגיות התת מרחב על Y ו Z בהתאמה. כמו כן σ תהיה טופלוגיית תת המרחב ש (Y,τ_Y) משרה על Z. צריך להוכיח ש $\sigma=\tau_Z$. נוכיח הכלה דו כיוונית. נניח $A\in\sigma$ כלומר $A=Z\cap U$ כאשר $U\in\tau_Y$. לפי הגדרה $U=Y\cap V$ כאשר $V\in\tau$. לכן

$$A=Z\cap Y\cap V=Z\cap V$$

כאשר V פתוחה ב X. לפי הגדרה זה אומר ש $A\in\tau_Z$. מצד שני נניח $A\in\tau_Z$כלומר

$$A=Z\cap U$$

כאשר U פתוחה ב X. אז היות ש $Z\subseteq Y$ נקבל ש

$$A=Z\cap Y\cap U$$

ולפי הגדרה $Y\cap U\in\tau_Y$ ולכן

$$A\in\sigma$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

פתרון. נניח X מרחב עם טופולוגיה קו סופית ו $Y \subseteq X$. צריך להוכיח שהקבוצות הסגורות ב Y הן בדיוק הקבוצות הסופיות. תהי $A \subseteq Y$ קבוצה סגורה אז

$$A = Y \cap U$$

כאשר U סגורה ב X כלומר U סופית ולכן גם A סופית. מצד שני נניח ש $A \subseteq Y$ סופית. אז

$$A = Y \cap A$$

אבל A סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב Y. כנדרש.

5. יהי (X,τ) מ"ט. הוכיחו ש (X,τ) טריויאלי אמ"ם לכל $X \supseteq A \neq \emptyset$, A צפופה ב X.

פתרון:

$(\Rightarrow)$ צ"ל $\tau = \{\emptyset, X\}$. נניח בשלילה כי $\tau \ni O \neq \emptyset, X$ אזי $O^c \neq \emptyset, X$ סגורה ולכן $cl(O^c) = O^c \neq X$ בסתירה לנתון.

$(\Leftarrow)$ צ"ל לכל $X \supseteq A \neq \emptyset$, A צפופה ב X. תהא $X \supseteq A \neq \emptyset$ כיוון שהנתון הוא ש $\tau = \{\emptyset, X\}$ הקבוצות הסגורות היחידות הן $\{\emptyset, X\}$ ולכן $cl(A) = X$. כלומר A צפופה.

6. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

פתרון:

יהא $x \in U$ צ"ל $x \in cl\left(A \cap U\right)$. ש"ל לכל סביבה פתוחה $x \in V$ מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$. אכן, לכל V כזאת, כיוון ש $U \cap V$ פתוחה לא ריקה (כי $x \in U \cap V$) ו A צפופה מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

(ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

פתרון:

$(\subseteq)$ מסעיף קודם $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$ ולכן $cl\left(U\right) \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

$(\supseteq)$ $A \cap U \subseteq U$ ולכן $cl\left(A \cap U\right) \subseteq cl(U)$

7. יהי (X,τ) מ"ט וA, B תתי קבוצות. הוכיחו/ הפריכו: במקרה שאין שוויון, האם יש הכלה שנכונה תמיד?

(א) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

(ב) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$

פתרון:

i. $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A$, ולכן $int(A \cap B) \subseteq int(A)$. באופן דומה, $int(A \cap B) \subseteq int(B)$. לכן $int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$.

$\supseteq$: $int(A) \subseteq A, int(B) \subseteq B$, לכן $int(A) \cap int(B) \subseteq A \cap B$. בנוסף, $int(A) \cap int(B)$ פתוח כחיתוך סופי של פתוחות, ולכן מוכל ב$int(A \cap B)$ (שזה האיחוד של כל הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב$A \cap B$).

ii. $\supseteq$: $A \subseteq A \cup B$ ולכן $int(A) \subseteq int(A \cup B)$. באופן דומה $int(B) \subseteq int(A \cup B)$. לכן $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$.
הכיוון השני לא נכון. נביא דוגמא נגדית. $A = [0,1], B = [1,2]$. אז $int(A \cup B) = int([0,2]) = (0,2)$. מצד שני, $int(A) \cup int(B) = (0,1) \cup (1,2)$

8. עוד תרגילים:

(א) הראו כי $\mathbb{R}^n$ ספרבילי.

(ב) הוכיחו כי מרחב הסדרות l_2 ספרבילי.

(ג) חיתוך של שתי קבוצות צפופות ופתוחות הוא צפוף.

(ד) קבוצה A במרחב X דלילה אמ"מ $cl(A)$ דלילה ב-X.

(ה) אם A דלילה ב-X אז A^c צפופה ב-X.

(ו) מצאו דוגמה למרחב טופולוגי ואוסף בן מנייה של קבוצות דלילות שאיחודן לא דליל.