פתרון משוואות דיפרנציאליות באמצעות התמרת פורייה

אין כאן צורך בהרבה ידע על משוואות דיפרנציאליות, רק את הבסיס.

אנו רוצים להשתמש בהתמרת פורייה כדי לפתור משוואות דיפרנציאליות. נדגים זאת על מד"ר, אך אפשר לעשות זאת גם במד"ח.
ההגיון פשוט – במשוואה דיפרנציאלית מופיעות פונקציה והנגזרות שלה. התמרת פורייה יודעת "לתרגם" את ההתמרה של הנגזרת להתמרה של הפונקציה המקורית די בקלות, לפי הכלל הבא:

$$F\left[f^{(n)}\left(x\right)\right]\left(\omega\right)=\left(i\omega\right)^{n}F\left[f\right]\left(\omega\right)$$

וביחד עם הליניאריות ונוסחת המומנט:

$$F\left[x^{n}f\left(x\right)\right]\left(\omega\right)=i^{n}\frac{d^{n}}{d\omega^{n}}F\left[f\right]\left(\omega\right)$$

אפשר להעביר את המשוואה, שבה יש פונקציה ונגזרות, למשוואה עם ההתמרה בלבד, למשל:

$$y''-y=0$$

נפעיל את ההתמרה:

$$F\left[y''-y\right]=F\left[0\right]$$

מהליניאריות ומהתכונה של התמרת הנגזרת נקבל:

$$-\omega^2 F[y] - F[y] = 0$$

וקיבלנו משוואה על ההתמרה של y. מכאן, לכאורה, אפשר לחלץ את ההתמרה ואז להפעיל שוב את ההתמרה, להשתמש בתכונת ההתמרה הכפולה ולמצוא את y.

לכאורה.

כמו שאנו יודעים, התמרת פורייה מוגדרת על פונקציות רציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט. אף אחד לא מבטיח שפתרון המשוואה הדיפרנציאלית הוא אכן פונקציה כזו.

בדוגמה $y'' - y = 0$, שני פתרונות בלתי תלויים הם e^x ו-e^{-x}, ולכן הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

הפונקציות e^x, e^{-x} הן לא אינטגרביליות בהחלט. כל צירוף ליניארי שלהן $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ הוא לא אינטגרבילי בהחלט, חוץ מהפתרון הטריוויאלי, $y = 0$.

אכן, אם נמשיך וננסה לפתור את המשוואה בדרך שבה התחלנו, נקבל:

$$-\omega^2 F[y] - F[y] = 0 \Longrightarrow \left(1 + \omega^2\right) F[y] = 0$$

ומכיוון ש-ω הוא משתנה ממשי, נקבל $F[y] = 0$ ומכאן $y = 0$. זהו הפתרון היחיד שאינטגרבילי בהחלט, והפתרון היחיד (והלא-מעניין) שקיבלנו.

אם כן, כאשר הפתרון הוא פונקציה שאינה אינטגרבילית בהחלט, אין שום סיבה שהתמרת פורייה תעזור למצוא אותו.

וזה נהיה אפילו יותר גרוע – ואני אתנסח עכשיו ברישול מתמטי כדי שהנקודה שאני רוצה להעביר תהיה ברורה – "הרבה" פונקציות אינטגרביליות בהחלט שאנחנו מתעסקים איתן בהתמרת פורייה הן או פונקציות שמעבר לתחום מסוים שוות ל-0, למשל:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

או פונקציות עם ערך מוחלט ש"עוזר להן" להיות אינטגרביליות בהחלט, למשל $f(x) =$ $e^{-|x|}$.

מה הבעיה עם פונקציות כאלה? מבלי להיכנס לעומק התיאוריה של משוואות דיפרנציאליות, אנחנו מחפשים פתרונות שהם פונקציות גזירות, הרי במשוואה דיפרנציאלית מופיעות נגזרות. פונקציות כאלה הן לא גזירות, לפחות לא בכל נקודה.

אם כך, אנו נשארים עם אוסף די עלוב של משוואות דיפרנציאליות שהתמרת פורייה יודעת לפתור – כאלו שהפתרון שלהן הוא מצד אחד פונקציה אינטגרבילית בהחלט ומצד שני גזירה מספיק פעמים. בשורה התחתונה, התמרת פורייה לא כל-כך יעילה כשזה מגיע לפתרון משוואות דיפרנציאליות.

כאן המקום להעיר שהתמרת לפלס (שהיא דומה להתמרת פורייה אך שונה ממנה) יותר אפקטיבית מהתמרת פורייה מבחינה זו. אני מניח שראיתם זאת בקורס במד"ר.

אף על פי כן, בואו ונראה דוגמה שבה התמרת פורייה כן עוזרת.

אנחנו רוצים שהפתרון יהיה פונקציה אינטגרבילית בהחלט וגזירה.

הפונקציות "הכי פשוטות" שעולה לראש היא $y = e^{-x^2}$ ודומות לה.

נפתור למשל את המשוואה:

$$y'' + xy' + y = 0$$

שמופיעה בתרגיל 8. נפעיל את התמרת פורייה על שני האגפים. נקבל:

$$F[y'' + xy' + y] = F[0]$$

מהליניאריות ומהמומנט, נקבל:

$$F[y''] + i \cdot \frac{d}{d\omega} F[y'] + F[y] = 0$$

מתכונת התמרת הנגזרת, נקבל:

$$-\omega^2 F\left[y\right] + i \cdot \frac{d}{d\omega}\left(i\omega \cdot F\left[y\right]\right) + F\left[y\right] = 0$$

לשם הפשטות, נסמן $F\left[y\right] = F$. הנגזרת באמצע היא נגזרת של מכפלה, ונקבל:

$$-\omega^2 F - F - \omega F' + F = 0$$

הסימן באמצע הוא שלילי כי $i^2 = 1$. נסדר ונקבל:

$$\omega F = -F'$$

ההתמרה הפכה את המשוואה למשוואה מסדר ראשון. משוואה כזו אפשר לפתור באמצעות הפרדת משתנים.

נסמן $F' = \frac{dF}{d\omega}$, ואז:

$$\omega F = -\frac{dF}{d\omega}$$

ולכן:

$$-\omega d\omega = \frac{1}{F} dF$$

נבצע אינטגרציה בשני האגפים:

$$\int -\omega d\omega = \int \frac{1}{F} dF$$

אלו אינטגרלים שאנחנו (ברוך ה') יודעים לעשות:

$$-\frac{\omega^2}{2} = \ln F + C$$

אם נסמן $C = \ln C$ ונשתמש בחוקי הלוגריתם (אפשר "להתעלל" בקבוע כרצוננו), נקבל:

$$-\frac{\omega^2}{2} = \ln CF$$

כלומר:

$$e^{-\frac{\omega^2}{2}} = CF$$

ושוב, אם נסמן $C = \frac{1}{C}$, נקבל בסך הכל:

$$F\left[y\right]\left(\omega\right) = Ce^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

זו פונקציה אינטגרבילית בהחלט, ולכן נוכל לבצע שוב את ההתמרה:

$$F\left[F\left[y\right]\right] = F\left[Ce^{-\frac{\omega^2}{2}}\right]$$

נוסחת ההתמרה הכפולה אומרת: $F\left[F\left[y\right]\right]\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}y\left(-x\right)$, כלומר:

$$\frac{1}{2\pi}y\left(-x\right) = CF\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\left(x\right)$$

הקבוע C יצא החוצה לפי תכונת הליניאריות של ההתמרה, ואת השם של המשתנה שיניתי ל־x.

כעת, נחשב את ההתמרה באגף הימני. אנו יודעים שמתקיים:

$$f\left(x\right) = e^{-x^2} \Longrightarrow F\left[f\right]\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

למוענינים - בתרגול 8 של הטכניון יש הוכחה לכך. כעת, אנו רוצים את ההתמרה של $e^{-\frac{x^2}{2}}$, כלומר של $f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. תכונת ההזזה של ההתמרה נותנת:

$$F\left[f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] = F\left[f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+0\right)\right] = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{\frac{ix\cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}}F\left[f\right]\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

שוב, למשתנה קראתי x. אם כן, קיבלנו:

$$\frac{1}{2\pi}y\left(-x\right)=CF\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\left(x\right)=C\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ואם נכפיל ב-2π, נחליף $-x$ ב-x ונסדר קצת את אגף ימין, נקבל:

$$y\left(x\right)=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

כשהקבוע C "בלע" את הקבוע $\sqrt{2\pi}$.

זהו פתרון המשוואה; אם יש גם תנאי התחלה, אפשר להציב אותם ולמצוא את C המתאים. הפתרון למשוואה זו מופיע (מעט יותר בקצרה) בתרגול 11 של הטכניון.