שאלה 2 (12 נקודות)

א. (7 נקודות) מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^2}$, במידה וקיים.

ב. (5 נקודות) מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n)}$ (נמקו היטב את תשובתכם!).

סעיף א': נמצא את הגבול של הפונקציה ולפי היינה נסיים (קיצרתי)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}\right)^2=\{\infty^2\}=\infty$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty},L'Hopita\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=\infty$$

סעיף ב':

$$1\le\sqrt[n]{\ln(n)}\le\sqrt[n]{n}\to 1$$

לפי סנדביץ' הגבול הוא 1, רק צריך לנמק למה $\ln(n)<n$ החל משלב מסויים (שוב אפשר בעזרת סדרי גודל).

הרי $\frac{\ln(n)}{n}\to 0$ ולכן החל משלב מסויים $\frac{\ln(n)}{n}<1$ ואז $\ln(n)<n$

שאלה 3

א. (20 נקודות) נתבון בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\arctan\left(x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה. הוכיחו את תשובתכם!

2) מצאו את כל הנקודות ב- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ בהן הפונקציה גזירה. הוכיחו את תשובתכם!

סעיף 1' – לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כצירוף של אלמנטריות בתחום הגדרתן.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\arctan(x^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\{\text{אפיסה}\cdot\text{חסומה}\}=0=f(0)$$

ולכן בעצם הפונקציה רציפה בכל הממשיים!

סעיף 2' – הפונקציה גזירה לכל $x\neq 0$ כצירוף של אלמנטריות גזירות

נבדוק גזירות באפס

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}$$

פירוק מחוכם (שווה לנסות)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^2)}{x}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^4}}{1}=0$$

ולכן הגבול המקורי הוא אפס כאפיסה כפול חסומה וסה"כ הפונקציה גזירה באפס, ומתקיים כי $f'(0)=0$.

ב. (10 נקודות) מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(3,2)$ עבור העקומה $y^4+5y^2=x^4-5x^2$.

לא למדנו לגמרי, אבל נניח שיש נגזרת בנקודה הזו, נחשב אותה.

השיטה נקראת גזירה של פונקציה סתומה.

נגזור את שני הצדדים

$$4y^3y'+10yy'=4x^3-10x$$

אפשר כעת להציב $x=3, y=2$

$$32y'-10y'=108-30$$

ומוצאים את y'.

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר (הוכיחו את תשובתכם).

א. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(\ln 5)^n}$.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n^n)}$.

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n+\ln n}$.

סעיף א' (נשים לב שמדובר בטור חיובי) נעשה מבחן השורש

$$\sqrt[n]{n^5}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^5\to 1$$

$$\sqrt[n]{(\ln(5))^n}=\ln(5)$$

הגבול של השורש הוא $\frac{1}{\ln(5)}<1$ ולכן הטור מתכנס בהחלט.

סעיף ב'

$$\sum\frac{1}{nln(n^n)}=\sum\frac{1}{n^2\ln(n)}<\sum\frac{1}{n^2}$$

ולכן מתכנס (שוב טור חיובי)

סעיף ג'

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n+\ln(n)}$$

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum \frac{\ln(n)}{n+\ln(n)} > \sum \frac{1}{n+\ln(n)} \sim \sum \frac{1}{n}$$

ולכן הטור אינו מתכנס בהחלט.

על מנת להוכיח שהטור כן מתכנס לפי לייבניץ (וסה"כ מתכנס בתנאי) צריך להראות כי

$$\frac{\ln(n)}{n+\ln(n)}$$

מונוטונית יורדת (ברור שהיא שואפת לאפס כי סדרי גודל).

נראה באמצעות חקירת פונקציות

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x+\ln(x)}$$

צריך להוכיח שהנגזרת שלילית החל משלב מסויים

$$f'(x) = \frac{1+\frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+\ln(x))^2} = \frac{1-\ln(x)}{(x+\ln(x))^2}$$

לכל $x > e$ הנגזרת שלילית, ולכן הסדרה יורדת אחרי $n > e$.

<u>שאלה 5</u>

א. (15 נקודות) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהיו $a<b\in\mathbb{R}$ המקיימים $f(a)\geq b,\ f(b)\leq a$. הוכיחו שקיים $x\in(a,b)$ עבורו $f(x)=x$.

ב. (10 נקודות) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $f(2x)=2f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו שאם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו $\lim_{x\to 0} f(x)=L$, אזי $L=0$.

סעיף א':

$$h(x) = f(x) - x$$

$$h(a) = f(a) - a \geq b - a > 0$$

$$h(b) = f(b) - b \leq a - b < 0$$

ולכן לפי ערך הביניים קיימת נקודה $c \in (a,b)$ עבורה $h(c) = 0$ כלומר $f(c) = c$

נשים לב שh רציפה כצירוף רציפות.

סעיף ב':

נניח ש $\lim_{x\to 0} f(x) = L$

$$\lim_{x\to 0} f(2x) = L$$

אך מצד שני

$$\lim_{x\to 0} f(2x) = \lim_{x\to 0} 2f(x) = 2L$$

ולכן

$$L = 2L$$

ולכן

$$L = 0$$

הסבר למעבר $\lim_{x\to 0} f(2x) = L$:

תהי $0 \neq x_n \to 0$ אנחנו צריכים להוכיח

$$f(2x_n) \to L$$

אבל $0 \neq 2x_n \to 0$

ולכן אכן

$$f(2x_n) \to L$$

כי $\lim_{x\to 0} f(x) = L$

תרגיל העשרה בזמן הפתרון:

תהי $g(x)$ פונקציה חח"ע כך ש $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$

תהי $f(x)$ פונקציה כך ש $\lim_{x\to y_0} f(x) = L$

אזי

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L$$

זה מאפשר לי לעשות מעברים מהסגנון

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \begin{Bmatrix} t = g(x) \\ x \to x_0 \\ t \to y_0 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to y_0} f(t)$$

הוכחת התרגיל:

תהי $x_0 \neq x_n \to x_0$ צ"ל ש

$$f\big(g(x_n)\big) \to L$$

כיוון ש $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ נובע כי $g(x_n) \to y_0$

כיוון שg חח"ע, היא שווה לy_0 לכל היותר בנקודה אחת. החל משלב מסויים הסדרה x_n ששואפת לx_0 אך שונה מx_0 תהייה קרובה יותר לx_0 מאשר המקור של y_0 וסה"כ נסיק שהחל משלב מסויים $g(x_n) \neq y_0$

סה"כ

$$y_0 \neq g(x_n) \to y_0$$

ולכן

$$f\big(g(x_n)\big) \to L$$

כפי שרצינו.

<u>שאלה בונוס</u> (7 נקודות)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח שגם פונקצית הנגזרת f' היא רציפה על כל $\mathbb{R}$. נניח בנוסף שהגבולות $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} f'(x)$ קיימים (סופיים). הוכיחו ש- $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

נסמן $f(x) \to_{x\to\infty} L$
נביט בקטעים מהצורה $[n, n+1]$ ונחשב את שיפועי המיתרים

$$f'(c_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = f(n+1) - f(n) \to L - L = 0$$

נסמן $f'(x) \to_{x\to\infty} K$

כיוון ש $n \le c_n$ גם $c_n \to \infty$

ולכן

$$f'(c_n) \to K$$

ולכן $K = 0$.

העשרה נוספת על הבונוס:

נניח $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ונניח הפונקציה גזירה בכל הממשיים, האם בהכרח $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

רעיון – יש אסימפטוטה, אך הפונקציה עולה ויורדת מסביבה.

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \to 0$$

לא הפרכה טובה, כי הפונקציה לא עשתה מספיק עליות וירידות

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

ולזה אין גבול באינסוף, כיוון ש $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 0$ אבל $\cos(x^2)$ קופץ בין מינוס 1 ל1 עבור הצבות מתאימות.