תרגול 6-אושרית

יחס על מכפלה, יחס סדר מילוני, תחום, טווח, יחס שלם, חד ערכי והגדרת פונקציה

איך מגדירים יחס סדר על מכפלה:

יהיו $(B,\le_B)$ $(A,\le_A)$ 2 קב' סדורות חלקית.

על $A\times B$ ניתן להגדיר את היחס R הבא:

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2) \longleftrightarrow (a_1\le a_2)\wedge(b_1\le b_2)$$

תרגיל: הוכיחו שהיחס שהגדרנו על המכפלה הוא יחס סדר.

הוכחה:

1. **רפלקסיביות:** יהי $(a,b)\in A\times B$ נרצה להראות כי: $(a,b)R(a,b)$ ואכן - מתקיים כי - $(a\le a)\wedge(b\le b)$

2. **אנטי-סימטריות:** יהיו $(a,b),(c,d)\in A\times B$ כך ש- $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(a,b)$ צ"ל: $(a,b)=(c,d)$

$$(a\le c)\wedge(b\le d) \qquad (c\le a)\wedge(d\le b)$$

$$(a,b)=(c,d) \Leftarrow a=c \wedge d=b$$

3. **טרנזיטיביות:** יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in A\times B$ כך ש- $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$ צ"ל: $(a,b)R(e,f)$

$$a\le c \wedge b\le d \wedge c\le e \wedge d\le f$$

$$a\le e \wedge b\le f \Longrightarrow (a,b)R(e,f)$$

טרנזיטיביות "$\le$"   טרנזיטיביות "$\le$"

המשך...

שאלה: אם R_A ו- R_B ~~שהגדרנו~~ הם יחסי סדר קוויים האם R - שהגדרנו (יחס המכפלה) האם הוא יחס סדר קווי

תזכורת: יחס סדר קווי- יחס סדר שניתן להשוות על פיו בין כל זוג איברים בקבוצה.

המשך...

שאלה: האם R_A ו-R_B ~~שהגדרנו~~ הם יחסי סדר קוויים? האם R שהגדרנו (יחס [illegible]) הוא יחס סדר קווי

פתרון: $\boxed{\text{לא}}$ **דוג' נגדית:** $A=B=\mathbb{N}$ נקח יחס $R_A=R_B=\leq$ וניקח למשל את $(1,3),(2,2)\in A\times B$.

לא ניתן להשוות ביניהם. $3\not\leq 2 \wedge 1\leq 2$

תזכורת: יחס סדר קווי- יחס סדר שניתן להשוות על פיו בין כל זוג איברים בקבוצה.

יחס סדר מילוני:

יהיו $(A,\le_A), (B,\le_B)$ 2 קב' סדורות חלקית.

על $A\times B$ ניתן להגדיר את היחס המילוני R ע"י -

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2) \longleftrightarrow (a_1<a_2) \vee (a_1=a_2 \wedge b_1\le b_2)$$

לפעמים מכונה גם יחס סדר לקסיקוגרפי

דוגמא: סדרו לפי הסדר את הזוגות הבאים לפי יחס סדר מילוני:

$(1,3), (2,2), (2,1), (0,9)$

יחס סדר מילוני:

יהיו: $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ 2 קב' סדורות חלקית

אז $A\times B$ ניתן להגדיר את יחס המילוני R ע"י -

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2) \longleftrightarrow (a_1<a_2) \vee (a_1=a_2 \wedge b_1\leq b_2)$$

לפעמים מכונה גם יחס סדר לקסיקוגרפי

דוגמא: סדרו לפי הסדר את הזוגות הבאים לפי יחס סדר מילוני:

$(1,3), (2,2), (2,1), (0,9)$

2 4 3 1

דוג: נסתכל על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם הסדר המילוני

נגדיר $B=\{(1,x) \mid x\in\mathbb{N}\}$, מצאו- $inf(B)$, $sup(B)$.

פתרון:

טענה: $inf(B)=(1,1)$ הוכחה: נשים ♡ שלכל- $b\in B$ מתקיים: $(1,1)\leq b$ כמו כן- $(1,1)\in B$.

: נוכל חסם מלרע ש-ך לקר' בלי (האינפימום) האו-המינימום שווה לו אבל הוא המינורה

$\forall n: (1,n) < (2,1)$ ולכן שקה איבר שקטן

$m\in\mathbb{N}$ $(1,m)$ וגם-

$(1,m) \not\geq (1,m+1)$

טענה: $sup(B)=(2,1)$ הוכחה:

יחס סדר על מכפ

תרגיל ממבחן - אז ב' מועד:

תהא A קבוצה ו-$R\subseteq A\times A$ יחס סדר מלא עליה. נגדיר O להיות קב' כל יחסי הסדר החלקיים על A, ומכילים את R.

הערה: יחס סדר מלא= יחס סדר קווי = יחס סדר לינארי

צ"ל: R איבר מקסימלי ב-O.

פתרון:

יהי $S\in O$ יחס סדר חלקי על A המקיים $R\subseteq S$. צ"ל: $R=S$.

נניח - כי R מוכל ממש ב-S.

אזי קיים $(a,b)\notin R \wedge (a,b)\in S$ כיוון ש-R יחס סדר מלא - אזי מתקיים $(b,a)\in R$ כיוון ש-R מוכל ב-S

נקבל כי $(b,a)\in S$, מכיוון ש-S יחס סדר חלקי ובפרט אנטי סימטרי אזי - $a=b$.

וקיבלנו כי $(a,a)\notin R$ בסתירה לכך ש-R יחס סדר מלא ובפרט רפלקסיבי.

שאלה: האם ב-O יש מקסימום?

תשובה: לא! (נניח שקיים אחד S מקסימום, כיוון ש- $R^{-1}\in O$ אזי - $R\cup R^{-1}\subseteq S$ ובפרט אם $\underbrace{(a,b)}_{\text{שונים}}\in R$

(בהנחה שב-A יש 2 איברים לפחות) אזי - $(b,a)\in R^{-1}$ וגם - $(a,b),(b,a)\in S$ בניגוד לכך ש-S יחס סדר חלקי.

$R \subseteq S \wedge R^{-1} \subseteq S$

ובפרט - אנטי-סימטרי. סתירה!

הגדרה: יהיו A,B קב' ו-R יחס ביניהן. נגדיר:

1. **התחום** של R הינו - $dom(R)=\{a\in A \mid \exists b\in B : (a,b)\in R\}=\{(*,),(*,),\dots\}$
2. **התמונה** של R הינה - $Im(R)=\{b\in B \mid \exists a\in A : (a,b)\in R\}=\{(,*),(,*),\dots\}$

הערה: נובע מההגדרה מיידית - $dom(R)\subseteq A$, $Im(R)\subseteq B$

דוגמה: $R=\{(1,a),(2,b),(3,a),(a,1)\}$ מצאו את התחום והתמונה.

פתרון:

$$dom(R)=\{1,2,3,a\}$$

$$Im(R)=\{a,b,1\}$$

הגד׳: יחס R מ-A ל-B נקרא **שלם** אם - $\forall a\in A\ \exists b\in B: (a,b)\in R$, בקיצור - $dom(R)=A$.

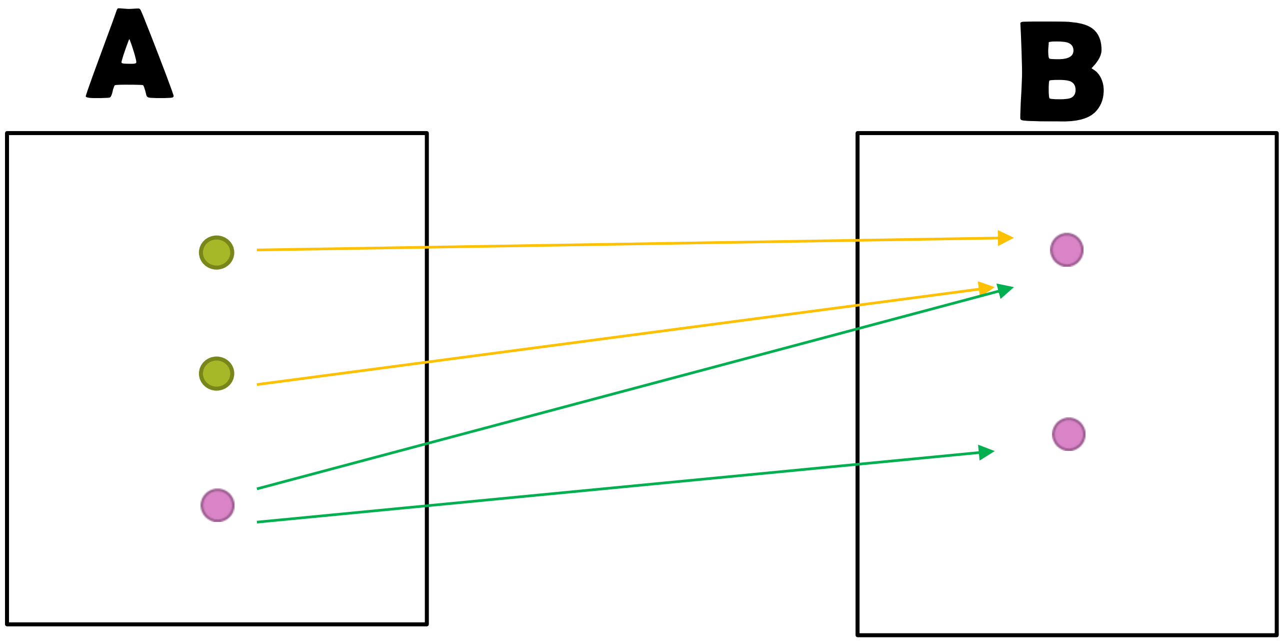
הגד׳: יחס R מ-A ל-B נקרא **חד ערכי** אם - $(x,b)\in R \wedge (x,d)\in R \to b=d$, כלומר - אין איבר שנשלח ל-2 מקומות

הגד׳: יחס חד ערכי ושלם נקרא - **פונק׳**. במקרה זה - נהוג לסמן - במקום: $(a,b)\in R \leftrightarrow R(a)=b$.

כמו כן - נהוג לסמן את R בתור f.

היחס הכתום לא שלם

היחס הירוק לא חד ערכי



בהצלחה!!!