בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס' : 8821105
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
תאריך: 28.08.06 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 6

1. מעל קבוצה $R\times R^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$.
הוכח:
א. $G=(R\times R^*,\bullet)$ חבורה
ב. היא לא אבלית.
ג. קיים מונומורפיזם $G\to GL_2(R)$
(כאשר $GL_2(R)$ חבורת מטריצות ממשיות 2×2 הפיכות) .
ד. החבורה היא פתירה.

2. נסמן $[a,b]:=aba^{-1}b^{-1}$ ("הקומוטטור") של $a,b\in G$ בחבורה G.
נגדיר ת"ח $G\le G^{'}:=\langle\{[a,b]:\quad a,b\in G\}\rangle$ ("הקומוטנט") הנוצרת ע"י קבוצת הקומוטטורים. הוכח:
א. $G^{'}\lhd G$.
ב. $G/G^{'}$ אבלית.
ג. אם $f:G\to Y$ הומומורפיזם וחבורה Y אבלית אזי $G'\subseteq \ker f$.

3. א. הוכח משפט קיילי.
ב. הוכח כי קיימת תת חבורה H בחבורה S_{97} כך ש H איזומורפית לחבורה $G=<cis(\frac{17}{25}\pi)>$.
ג. הוכח (לנמק היטב) ש $S_7=<(1,2,3,4,5,6,7),\quad(5,4)>$.
ד. תאר תמונות אפימורפיות של החבורות $D_3,<cis\sqrt{3}\pi>$.

4. א. כמה יוצרים יש לחבורה $\Omega_{100} \times Z_{49}$?

ב. באמצעות משפט Euler מצא 2 ספרות אחרונות של המספר
$36704348073767^{1998} + 2006$.

ג. הוכח שאם $n = p$ ראשוני אז במונויד $(Z_n, \bullet)$ $[x]^{-1} = [x]$ אם ורק אם $[x] = [1]$
או $[x] = [p-1]$.

ד. הוכח (בעזרת ג') : לכל p ראשוני מתקיים $p \mid (p-1)! + 1$.

5. א. הוכח משפט Sylow 1.
ב. הוכח או הפרך: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.
ג. הוכח או הפרך: קיימת חבורה פשוטה עם 99 איברים.

6. א. הוכח משפט Burnside על מספר מסלולים.
ב. כמה איברים מתחלפים עם התמורה $a := (2,6,5,3)$ בחבורה S_9 ?
ג. נתונה פעולה $G \times X \to X$ כאשר $G := D_7$ ו $|X| = 19$.
הוכח או הפרך: קיימת נקודת שבת.
ד. כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע ב 3
צבעים קבועים.

בהצלחה ושנה טובה !

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס' : 8821105
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 6

1. תהי $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ **חבורה אבלית ונגדיר** $b=a_1a_2\cdots a_n$.
הוכח:
א. $b^2=1$.
ב. אם ב G **אין איבר מסדר 2 אזי** $b=e$.
ג. הוכח : לכל p **ראשוני** $(p-1)!+1$ **מתחלק ב** p .
ד. בעזרת משפא Euler חשב את 197^{81} **מודולו** 34.

2. א. הוכח שאם $[G:H]=2$ **אז** $H\lhd G$ **. האם זה נכון אם** $[G:H]=3$ **? (לנמק היטב)**
ב. תהי $D_4=<a,\sigma>$ **היא חבורה דיהדרלית (** a **הוא סיבוב) . נסמן :**
$K=\{e,\sigma a\},\quad H=\{e,\sigma a,a^2,\sigma a^3\}$ **. הוכח:**
H **ת"ח נורמלית ב** D_4**,** K **ת"ח נורמלית של** H **אבל** K **לא נורמלית ב** D_4 **.**
ג. תנו דוגמה של תת חבורות $H,\ K$ **בחבורה** G **כך שתת קבוצה** KH **היא לא תת חבורה.**

3. עבור $H\le G$ **נגדיר:** $N(H):=\{g\in G:\quad gH=Hg\}$
("נורמליזטור" של H **ב-** G**).**
הוכח:
א. $N(H)\le G$ **ו-** $N(H)=G\Leftrightarrow H\lhd G$ **.**
ב. $H\lhd N(H)$ **. ואם** $H\lhd K\le G$ **אזי** $K\le N(H)$ **.**
ג. $|\{gHg^{-1}:\quad g\in G\}|=[G:N(H)]$ **.**
ד. אם $K\le H\lhd G$ **ו-** H **ציקלית סופית אז** $K\lhd G$ **.**

4. א. הוכח משפט האיזומורפיזם הראשון.
ב. הוכח או הפרך: $C^{*}/T \cong R$, $R/5Z \cong T$ (כאשר $T := \{z \in C \mid \ \|z\|=1\}$).
ג. מצא תמונות אפימורפיות (עד כדי איזומורפיזם) של חבורת Euler U_8 .
ד. מצא מספר חבורות אבליות שונות (עד כדי איזו') עם 2500000 אלמנטים.

5. א. הוכח משפט Sylow 2.
ב. הוכח או הפרך: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.
ג. הוכח או הפרך: קיימת חבורה פשוטה עם 125 איברים.

6. א. הוכח שהצמדה $G \times G \to G,\ \ g \circ x \mapsto gxg^{-1}$ מגדירה פעולה של G מעל G.
ב. הוכח שבפעולה הנ"ל קבוצת F של נקודות שבת היא שווה למרכז של G.
ג. מצא מספר מחלקות צמידות בחבורה S_{10} .
ד. בעזרת משפט Burnside מצא מספר משולשים שונים (עד כדי D_3) אשר מתקבלים ממשולש משוכלל נתון אם מותר לצבוע קודקודים ב 3 צבעים קבועים.

בהצלחה !