פתרון מבנים אלגבריים להנדסה, 83-218, בוחן 1 תשע"ט

כ"ד אדר ב ה'תשע"ט, 31.3.19

מרצה: פרופ' נתן קלר.
מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בחרו **3 מתוך 4** השאלות. כל שאלה שווה 34 נקודות.
- **יש לענות על השאלון. המחברות לטיוטא בלבד!**
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. קבעו עבור הקבוצות והפעולות הבאות, האם הן אגודה/מונואיד/חבורה. באגודה מצאו את כל היחידות (שמאליות וימניות).

(א) אוסף המטריצות $\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{R} \right\}$, עם כפל מטריצות רגיל. (17 נק')

(ב) אוסף הסדרות הבוליאניות האינסופיות $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}\}$, עם פעולת קסור ($\oplus$) רכיב רכיב. כלומר, אם $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ אז $a \star b = (a_n \oplus b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (17 נק')

<u>פתרון:</u>

א. זוהי אגודה.

סגירות:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & c \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(c+d) & a(c+d) \\ b(c+d) & b(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}, x = a(c+d), y = b(c+d)$$

אסוציאטיביות בירושה מאסוציאטיביות של כפל מטריצות.

אין איבר יחידה. יש אינסוף יחידות ימניות:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & c \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(c+d) & a(c+d) \\ b(c+d) & b(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \iff c = -d$$

וכיון שיש יותר מיחידה ימנית אחת נובע (לפי תרגיל בכיתה) שאין יחידות שמאליות.

ב. זוהי חבורה:

כמובן שיש סגירות: אם $a,b \in \{0,1\}$ אז $a \oplus b \in \{0,1\}$. כלומר, סגירות רכיב רכיב גוררת סגירות בסדרה כולה.

קסור הוא אסוציאטיבי (קל לראות, למשל ע"י טבלת אמת).

איבר יחידה: סדרה שכולה אפסים ($(0_n)_{n\in\mathbb{N}}$), כי אפס הוא יחידה קסורית, ויחידה רכיב רכיב גוררת יחידה של הסדרה כולה.

הופכי: כל איבר הופכי לעצמו, כי:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \star (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \oplus a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

2.

(א) תהי $\sigma \in S_{15}$ המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma = (1,15)(2,5,7,8)(6,9,12)$$

i. מצאו את $sgn(\sigma), sgn(\sigma^{-1})$. (10 נק')

ii. מצאו $\tau \in S_{15}$ שלא מתחלף עם σ. (7 נק')

(ב) תהא G חבורה, ויהיו $g,h \in G$. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$(gh)^n = e \iff (hg)^n = e$$

(17 נק')

<u>פתרון:</u>

א. בתרגול ראינו כבר דברים שיעזרו לנו למצוא את הסימנים:

ראשית, סימן של מחזור מאורך k שווה ל- $(-1)^{k-1}$.

בנוסף, סימן של כפל מחזורים שווה לכפל סימני המחזורים.

ולסיום, ההופכי של מחזור הוא מחזור מאותו אורך (פשוט הופכים את סדר הופעת המספרים).
לכן נקבל:

$$sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma) = (-1)^1(-1)^3(-1)^2 = (-1)^6 = 1$$

כדי למצוא תמורה שלא מתחלפת עם σ פשוט ניקח כזו שלא מתחלפת עם אחד המחזורים, למשל:

$$(6,9)\sigma(6,9) = (1,15)(2,5,7,8)(9,6,12) \neq \sigma$$

כאשר המעבר הראשון מתרגיל בית, וזה שונה כי למשל שונים ב $\sigma(6)$. אם $\tau = (6,9)$ היה מתחלף היינו צריכים לקבל את σ.

ב. ראשית, נשים לב שמספיק להוכיח כיוון אחד כי הכיוון השני הוא אותו דבר בדיוק (פשוט תחליפו את השמות).
לכן נניח $(gh)^n = e$, לכן נקבל $(gh)(gh)^{n-1} = e$, ומכאן ש- $(gh)^{-1} = (gh)^{n-1}$. אבל כידוע $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, ולכן נקבל:

$$(hg)^n = h(gh)^{n-1}g = h(gh)^{-1}g = h(h^{-1}g^{-1})g = (hh^{-1})(gg^{-1}) = ee = e$$

.3

(א) תהא G חבורה בה מתקיים: $\forall g \in G : g^2 = e$. הוכיחו: G חבורה חילופית. (17 נק')

(ב) נגדיר את חבורת הקווטרניונים:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זו ביחס לכפל מטריצות היא חבורה. (סימונים מקובלים:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ואז $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$).
מצאו את $C(G)$. (17 נק')

<u>פתרון:</u>

א. הנתון בעצם אומר ש- $\forall g \in G : g^{-1} = g$. לכן נקבל שלכל $g, h \in G$ מתקיים:

$$gh = g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1} = hg$$

ולכן G חילופית.

ב. נשים לב ש:

$$ij = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = k$$

ואילו

$$ji = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -k \neq k$$

לכן $ij \neq ji$. ומכאן גם למינוסי שלהן: $i \cdot (-j) = -k \neq k = -j \cdot i$, $-i \cdot j = -k \neq k = -ji = j \cdot (-i)$. בסה"כ: $\pm i, \pm j \notin C(G)$.

בדומה:

$$ik = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = j$$

ואילו:

$$ki = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -j \neq j$$

ולכן גם $-k \cdot i = -j \neq j = i \cdot (-k)$. ולכן גם $\pm k \notin C(G)$.

לבסוף, ברור ש־ $\pm 1 \in C(G)$, כי הן סקלריות. לכן בסה"כ:

$$C(G) = \{\pm 1\}$$

4. יהי $n > 2$, ונתבונן בחבורת התמורות S_n.

(א) כמה תמורות זוגיות יש? (17 נק')

(ב) נסמן $\sigma_2 = (1,2)\,, \sigma_1 = (1,2,3,\ldots,n)$. הראו שכל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י σ_1, σ_2 והופכיהן. (17 נק')

<u>פתרון:</u>

א. נסמן ב־A את קבוצת התמורות הזוגיות וב־B את קבוצת התמורות האי־זוגיות. נגדיר פונקציה $F : A \to B$ ע"י: $F(\sigma) = (1,2)\sigma$.

זוהי פונקציה כי בהינתן תמורה זוגית $\sigma \in A$ ניתן להציגה עם מספר זוגי n של חילופים ולכן את התמורה $\sigma\,(1,2)$ ניתן להציג עם $n+1$ חילופים שזהו מספר אי זוגי ולכן $\sigma \in B\,(1,2)$ ולכן F מוגדרת.

בנוסף, אם נגדיר

$$G : B \to A$$

ע"י $G(\sigma) = (1,2)\,\sigma$ אז היא מעבירה תמורות אי־זוגיות לתמורות זוגיות בדומה ל F. בנוסף מתקיים כי $G = F^{-1}$ כי

$$G \circ F(\sigma) = G(F(\sigma)) = G((1,2)\,\sigma) = (1,2)\,(1,2)\,\sigma = \sigma$$

לכל $\sigma \in A$, וגם באופן דומה $F \circ G(\sigma) = \sigma$ לכל $\sigma \in B$. מכאן ש $|A| = |B|$.

כעת, כיוון ש $S_n = A \cup B$ ו $|S_n| = n!$ נקבל (כיוון שאין איבר משותף ל A ול B): $n! = |A| + |B| = 2\,|A|$ ולכן $|A| = \frac{n!}{2}$.

ב. יהי $(1,i)$ חילוף. מתקיים: $\tau = \sigma_2\sigma_1 = (2,3\ldots,n)$ ואז $\tau^{i-2}(2) = i$ בנוסף $\tau^{i-2}(1) = 1$.

נסמן $\tau' = \tau^{i-2}$ ואזי לפי תרגיל בית מתקיים $\tau'\sigma_2\,(\tau')^{-1} = (\tau'(1), \tau'(2)) = (1,i)$.