

תרגיל בית 6 אינפי 3

1. משטח נתון על ידי המשוואה $z = e^{-x^2-2y^2}$.

(א) מצאו $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה על המשטח, כך שאם יניחו עליה כדור, הוא יתחיל לנוע בכיוון $(2, 1, a)$ עבור a כלשהוא. מצאו גם את a .

(ב) מצאו נקודה על המשטח שאם יניחו עליה את הכדור הוא לא יזוז לשום מקום.

2. תהי $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור \mathbb{R}^2 . נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(7, 1) = 3$$

. נגדיר:

$$u(x, y) = 2x + 3y \quad v(x, y) = x - y$$

$$z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 1)$.

3. תהי פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. נתון כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$xf'_x + yf'_y = nf$$

לכל $(x, y) \in D$. הוכיחו כי

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

לכל $(x, y) \in D$ ו $t > 0$.

הדרכה: הגדירו

$$F(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^n}$$

והוכיחו כי F קבועה.

4. נתונה פונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

מצא את $f''_{xy}(0,0)$ ואת $f''_{yx}(0,0)$.

5. תהי $f(x, y)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D = (0, \infty) \times (0, \infty)$. ונניח ש x, y מבוטאים באמצעות s, t לפי $x = e^{s+t}$, $y = e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$$

הוכח כי

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x f_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$

6. פתרו את הבאים:

(א) מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(0,0)$ עד סדר 5 של $f(x, y) = e^{x^2} \sin(2y)$

(ב) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כתבו מחדש את הפולינום $x^3 + xy + y^2$ כך שהוא יהיה פולינום של $x - a$, $y - b$.

(ג) כתבו את פיתוח טיילור של $f(x, y) = \sin(xe^y)$ סביב הנקודה $(\frac{\pi}{2}, 0)$ עד סדר 2.

7. תהי $f(x, y) = e^{x^2 y^3}$.

(א) כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

(ב) חשבו את $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8 \partial y^{11}}$