תרגיל 7

1. תהי X קבוצה אינסופית ו$x_0 \in X$. נגדיר על X את הטופולוגיה הבאה:
$\tau = \{O \subseteq X : x_0 \notin O\} \cup \{O \subseteq X : |O^c| < \infty\}$.

   (א) הוכיחו שזאת אכן טופולוגיה.

   (ב) הוכיחו שכל הנקודונים בה סגוחים, פרט ל$\{x_0\}$. מה ניתן להגיד על $\{x_0\}$?

   (ג) הראו ש:

$$cl(A) = \begin{cases} A & |A| < \infty \\ A \cup \{x_0\} & otherwise \end{cases}$$

$$int(A) = \begin{cases} A & |A^c| < \infty \\ A \setminus \{x_0\} & otherwise \end{cases}$$

2. יהי X מ"ט, $A \subseteq X$, ותהי $\chi_A : X \to \{0,1\}$ פונקציה אופיינית, המוגדרת ע"י

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

   (א) הוכיחו שאם χ_A רציפה בx, אז $x \notin \partial(A)$.

   (ב) הוכיחו שχ_A רציפה $\iff \partial(A) = \emptyset \iff A$ סגוחה.

   (ג) הסיקו שאם X לא קשיר, אז קיימת פונקציה רציפה ועל $f : X \to \{0,1\}$.

3. יהי X מ"ט ותהיינה $A, B \subseteq X$ שתי תתי קבוצות.

   (א) הוכיחו כי מתקיים $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$

(ב) הראו ע"י דוגמא נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בשוויון.

(ג) נסחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור $int(A \cup B)$.

4. יהיו X, Y מ"ט ו$f : X \to Y$ הומיאומורפיזם. הוכיחו כי לכל $A \subseteq X$ מתקיים:

(א) $f(int(A)) = int(f(A))$.

(ב) $f(cl(A)) = cl(f(A))$.

(ג) $int(A)^c = cl(A^c)$

(ד) $cl(A)^c = int(A^c)$

5. יהי X מ"ט, $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה, ו$A \subseteq X$ קבוצה צפופה.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl(A \cap U)$ והסיקו $cl(U) = cl(A \cap U)$.

(ב) אפיינו את המרחבים הטופולוגיים בהם הקבוצה הצפופה היחידה היא כל המרחב. הוכיחו את תשובתכם.

6. הוכיחו שבמרחב נורמי, לכל כדור מתקיים $cl(B(a,r)) = B[a,r]$. תנו דוגמא לכך שבמרחב מטרי כללי הטענה לא נכונה.

7. תהי X קבוצה ו$\tau_1 \subseteq \tau_2$ שתי טופולוגיות עליה. הוכיחו:

(א) F סגורה ב$\tau_1 \Longleftarrow$ F סגורה בτ_2.

(ב) נסמן ב$cl_{\tau_i}(A)$ את הסגור של A בטופולוגיה τ_i, וכן לגבי $int_{\tau_i}(A)$. הוכיחו או הפריכו:
$int_{\tau_1}(A) \subseteq int_{\tau_2}(A)$, ו$cl_{\tau_2}(A) \subseteq cl_{\tau_1}(A)$.

(ג) השתמשו בסעיפים הקודמים, וכן במה שידוע על היחס בין הישר של סורגנפריי והטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$, כדי לחשב את הפנים והסגור של הקבוצות הבאות:
$(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$.