

תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{א})$$

$$z \neq 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \quad (\text{ב})$$

$$|z| = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{1+z^n} \quad (\text{ג})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n \quad (\text{ד})$$

2. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

$$z = 0 \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{א})$$

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{ב})$$

$$z = 0 \quad \text{סביב } \frac{z}{z^4+9} \quad (\text{ג})$$

3. יהי $\sum a_n z^n$ טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

4. (א) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n$

(ב) עבור הערכים בהם יש התכנסות, מצאו את סכום הטור.

5. מצאו את כל הפונקציות $f(z)$ המקיימות את התנאים הבאים

(א) $f(z)$ שלמה.

(ב) $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right| \leq 1$ עבור ערכי z כך ש $|z| \geq 10$.

(ג) $f(0) = 0$ ו $f'(0) = 0$ ו $f''(0) = 1$.