

קורס: 88-132-01, 05, 07
מרצים: פרופ' מ. אגרונובסקי, ד"ר ש. הורוביץ
כ"ז שבט, תשע"ג

מבחן בחשבון אינפיניטסמלי 1 מועד א'

ענו על 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. אתם חייבים לנמק כל תשובה. משך הבחינה שלוש שעות.

1. ענו על אחת משתי השאלות הבאות:

א. (לפי ניסוח פרופ' אגרונובסקי) צטטו והוכיחו את משפט וירשטרס על קיום מקסימום ומינימום.

ב. (לפי ניסוח ד"ר הורוביץ) צטטו והוכיחו את המשפט השני של וירשטרס על פי

המשפט הראשון (שאינכם צריכים להוכיח)

2. א. חשבו $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \right)$.
ב. חשבו: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$

3. קבעו אם כל טור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + \sin(n^2)}{n^2}$.
ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
ג. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n!)!}$.

4. נגדיר $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$. מצאו את כל המספרים a ו- b כך ש-

א. f רציפה בכל \mathbb{R} .
ב. f גזירה (או דיפרנציאבילית) בכל \mathbb{R} .
ג. f גזירה (או דיפרנציאבילית) פעמיים בכל \mathbb{R} .

5. נניח שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע פתוח (a, b) , ונניח ש- x_1, x_2, \dots, x_n הן נקודות כלשהן ב- (a, b) . הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

6. ענו על אחת משתי השאלות הבאות:

א. נגדיר $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$. חשבו את הנגזרות $f^{(2012)}(0)$ ו- $f^{(2013)}(0)$.

ב. קרבו את $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ עם שגיאה קטנה מ- 10^{-3} (על פי הערכת השארית).

בהצלחה