

מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 12 תשע"ח.

1. רשמו את כל החבורות האבליות מסדר $2^2 \cdot 7^3$ עד כדי איזומורפיזם.
2. כמה חבורות אבליות יש מסדר $p_1^4 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2$, עבור ראשוניים שונים p_1, p_2, p_3 ? כלשהם?
3. קבעו מי מהחבורות הבאות איזומורפיות אחת לשניה:
 $\mathbb{Z}_4 \times A_3 \times \mathbb{Z}_{75}, \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3, V_4 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
 $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}$
4. מצאו את כל הסדרות ההרכב של \mathbb{Z}_{18} , וחשבו את הגורמים שלהם.
5. הוכיחו שלכל n , החבורה D_n פתירה.
6. הוכיחו שכל חבורה מסדר $3^3 \cdot 11$ פתירה.
7. הוכיחו שחבורה פשוטה ולא אבלית אינה פתירה.
8. אחת החבורות החשובות שעוד לא יצא לנו להיתקל בהם היא חבורת הקוטרניונים. היא מוגדרת באופן הבא:
 $Q = \langle -1, i, j, k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, (-1)^2 = 1 \rangle$
זוהי חבורה בת 8 איברים: $\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$.

(א) כתבו את טבלת הכפל של החבורה.

(ב) הוכיחו שהיא לא אבלית

(ג) הוכיחו שהיא לא איזומורפית ל- D_4 . (למעשה, כל החבורות מסדר 8, עד כדי איזומורפיזם, הן החבורות האבליות, D_4 והקוטרניונים)