תזכורת:
קריטריון פירוק מלא
אי אפשר לבצע כל
איבר במחיר

תירגול

משפט

$(n\text{-}מ)$

$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אם ורק אם יש ל $\mathbb{F}^n$ בסיס שמורכב מוקטורים עצמיים של A .

דוגמא למטריצה לא לכסינה

המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני הוא $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

עבור $\lambda=2$ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים (הקבוצה הנ"ל נקראת המרחב העצמי) $\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$.

עבור $\lambda=3$ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים $\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$.

שכמובן לא מהווה בסיס (קיבלנו רק 2 וקטורים ולא 3 וקטורים כנ"ל).

דוגמא לשימוש בליכסון מטריצות

נתונה סדרת פיבונצי $\begin{cases}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\\a_0=a_1=1\end{cases}$.

מצא את האיבר ה 100 בסדרה.

פתרון

נסמן $v_0=\begin{pmatrix}a_1\\a_0\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix},\dots,v_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$ כאשר האיברים בוקטורים הם האיברים מסדרת פיבונצי. אנו מחפשים את a_{100} ועל מנת לעשות זאת נחפש את V_{100}.

נרצה למצוא מטריצה A כך ש $Av_n=v_{n+1}$ כלומר $A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}+a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}$.

נשים לב שעבור המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ אכן מתקיים $A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}+a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}$.

ואז $Av_0=v_1,Av_1=v_2,\dots,Av_n=v_{n+1}\Leftarrow A^nv_0=v_n$.

$Av_0=V_1$
$Av_1=V_2\Rightarrow A(Av_0)=V_2\Rightarrow A^2V_0=V_2$
$Av_2=V_3\Rightarrow A(A^2V_0)=V_3\Rightarrow A^3V_0=V_3$
$\vdots$
$Av_n=V_{n+1}$

באופן זה מקבלים ש: $\boxed{A^n\cdot V_0=V_n}$

ע"י הגדרה: $A\cdot V_{n-1}=V_n$
$A(A^{n-1}V_0)=V_n$
$A^nV_0=V_n$

נרצה לחשב את A^{100}, כי: $V_{100}=A^{100}\cdot V_0$. [נשים לב ש: $V_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.]

תחילה נמצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה A .

$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-\lambda-1=0$ הערכים העצמיים הם: $\lambda_1=\frac{1+\sqrt5}{2},\lambda_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

~~נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים~~

קיבלנו שיש ל-A 2 ע"ע שונים (A-ו מסדר 2) לכן A לכסינה.
נמצא ו"ע.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}v_1 - v_2 = 0$$
$$-v_1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}v_2 = 0$$

נמצא ע"ע ו"ע הנוסחה: $(\lambda_i I - A)v_i = 0$.

עבור $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ~~יש למצוא את הבסיס של מרחב האפס של המטריצה~~

$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \Leftarrow$ הווקטור העצמי הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Leftarrow$ הווקטור העצמי הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

המטריצה ההפיכה $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

אמרנו שאם: $A = PDP^{-1}$
אז: $A^n = PD^nP^{-1}$
לכן: $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$
ולכן

זה v_0

$v_{100} = A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^{100}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שיטה למציאת ערכים עצמיים

נניח ש A לכסינה. בהינתן שיש ל A n ערכים עצמיים נקבל שקיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PDP^{-1}$.

ע"ע של מטריצה אלכסונית D הם איברי האלכסון

כי לא משנה הסדר כי זה מספרים

I. $|A| = |PDP^{-1}| = |P| \cdot |D| \cdot |P^{-1}| = |D| \cdot |P| \cdot |P|^{-1} = |D| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

II. $tr(A) = tr(PDP^{-1}) = tr(P^{-1}PD) = trD = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

תזכורת: $tr(A)$ העקבה
ניקרא והוא סכום איברי האלכסון

~~tr~~ ~~לכלול~~ משפט
כי $tr(AB) = tr(BA)$

דוגמא

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ אז $~~\lambda_1 + \lambda_2 = 6, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5~~ \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

$\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = 2+4 = 6$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A| = 8-3 = 5$

תזכורת

כדי למצוא ערך עצמי כלומר סקלר λ שעבורו $Av = \lambda v$ יש לפתור את המשוואה $|\lambda I - A| = 0$.

כדי למצוא את הווקטורים העצמיים יש להציב כל אחד מהפתרונות שקיבלת במערכת המשוואות $Av = \lambda v$.
קבוצת הפתרון של המערכת הנ"ל נותן את כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי שהצבת.

כעת נגדיר ערך עצמי ווקטור עצמי עבור העתקה ליניארית $T: V \to V$. (העתקה ליניארית היא פונקציה שעבורה $\forall v_1, v_2 \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(v_1 + \alpha v_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$.

הגדרה

תהא $T: V \to V$ העתקה ליניארית וסקלר λ ונניח שקיים וקטור שונה מאפס v שעבורו מתקיים $T(v) = \lambda v$. כל וקטור המקיים יחס זה נקרא וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי λ.

דוגמא

תהא $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

אז: $T(1,1,-2) = 3 \cdot (1,1,-2)$ ולכן $(1,1,-2)$ הוא וקטור עצמי ו 3 הוא ערך עצמי.

כיצד נמצא וקטור עצמי וערך עצמי להעתקה ליניארית? (אלגוריתם למיון)

תזכורת

עבור העתקה ליניארית $T:V \to V$ קיימת מטריצה $[T]$ שנקראת ההצגה המטריצית של T כך שלכל וקטור $v \in V$ מתקיים $[T][v]=[T(v)]$. (נזכור ש $[v]$ הוא וקטור הקוארדינטות של v ביחס לבסיס הסטנדרטי ו $[T(v)]$ הוא וקטור הקוארדינטות של $T(v)$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.)

הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה $[T]$ הם הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של ההעתקה הליניארית $T:V \to V$.

תרגיל

תהא $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

א. מצא את הערכים העצמיים של ההעתקה הליניארית.

ב. לכל ערך עצמי שמצאת בסעיף א מצא את הבסיס למרחב העצמי המתאים לו. (הו"ע)

פתרון

א. תחילה נמצא את המטריצה $[T]$. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

ביחס לבסיס

$$T(1,0,0)=(2,0,0)=2\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)+0\cdot(0,0,1)$$
$$T(0,1,0)=(1,1,2)=1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+2\cdot(0,0,1)$$
$$T(0,0,1)=(0,-1,4)=0\cdot(1,0,0)-1\cdot(0,1,0)+4\cdot(0,0,1)$$

ולכן $[T]=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$ ← מסדרים את הנתונים בעמודות

נמצא את הערכים העצמיים כפי שלמדנו בשיעור שעבר.

הפולינום האופייני הוא $f_{[T]}=|\lambda I-[T]|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

ב. עבור $\lambda=2$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\{(1,0,0)\}$. עבור $\lambda=3$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\{(1,1,-2)\}$.

שזהו בדיוק הוקטור העצמי

תרגיל ← באופן דומה ניתן לראות

תהיי $T:M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(A)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot A$. מצא את הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים של T.

פתרון

נמצא תחילה את המטריצה המתאימה להעתקה הליניארית (המטריצה המייצגת)

עבור הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

לפי

$T(A)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}A$

נבחר הבסיס הסטנדרטי של מטריצה 2×2

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-2\end{pmatrix}$$

כי מתקיים

$[T][v]=[T(v)]$

מסדרים בעמודות המטריצה

(כי עושים תמונה רגיל שמה)

ואז

$$[T]=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$$ נמצא את הערכים העצמיים

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1&0\\0&\lambda-1&0&1\\-2&0&\lambda+2&0\\0&-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1&0\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&\frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1&0\\0&0&0&\frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1\end{vmatrix}=0$$

דירוג המטריצה

לאחר חישוב הדטרמיננטה

(עושים פעמיים פיתוח לפי עמודה ראשונה)

$$(\lambda-1)^2\cdot\left[\frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1\right]^2=0$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)^2=0$$

שימו לב שיש לבדוק עבור $\lambda=1$ בנפרד. $\lambda=1$ אינו ע"ע כי הו"ע שהוא נותן זה $V=0$ והגדרת ע"ע הוא שקיים וקטור שונה מ-0 V כך ש: $T(v)=\lambda\cdot V$.

יש שני ערכים עצמיים $\lambda=0,\lambda=-1$

אם $\lambda=0$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$-v_1+v_3=0$

$-v_2+v_4=0$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אם $\lambda=-1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל

במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ (מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל 2) נתון הבסיס:

$T(1+x)=1,\ T(1-x)=2+x,\ T(x+x^2)=x^2$

$P_1(x)=1+x, P_2(x)=1-x, P_3(x)=x+x^2$. T היא העתקה ליניארית המעתיקה את המרחב הנ"ל לעצמו כך שמתקיים: $T(P_1(x))=1, T(P_2(x))=2+x, T(P_3(x))=x^2$.

הוכח ש $\lambda=1$ הוא ערך עצמי ומצא בסיס למרחב העצמי הנתון.

לגבי $R_2[x]$ הבסיס הסטנדרטי הוא - $\{1, x, x^2\}$

פתרון

נמצא את המטריצה המתאימה לפי הבסיס הסטנדרטי

$1+x+1 \quad 1-x \qquad 1+x-(1-x)$

$$T(1)=\frac{1}{2}\left(T\left(P_1(x)+P_2(x)\right)\right)=1.5+0.5x,\ T(x)=\frac{1}{2}\left(T\left(P_1(x)-P_2(x)\right)\right)=-0.5-0.5x,$$

$$T(x^2)=T\left(P_3(x)\right)-\frac{1}{2}T\left(P_1(x)-P_2(x)\right)=x^2+0.5x+0.5$$

$$[T]=\begin{pmatrix}1.5 & -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\ x\\ x^2\end{pmatrix}$$

נחשב את הערך העצמי

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & \lambda+0.5 & -0.5\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\right|=0$$

ולכן $\lambda=1$ הוא ערך עצמי. (מכיוון שביקשו להוכיח אין צורך לפתור אלא רק להציב ולבדוק)

נחשב את הבסיס לווקטור העצמי כלומר נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & 1.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן הווקטור העצמי הוא $(1,0,-1)$

שימו לב שאכן $T(1-x^2)=1-x^2$

$-1+x-x^2=0$

$-1+3x-x^2=0$

$\Downarrow$

$x=0$

$\Downarrow$

$x^2=-1$

$\Downarrow$

$1=-x^2$

בס"ד פתרון נוסף לתרגיל האחרון:

תרגיל: במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ נתון הבסיס:

$$P_1(x) = 1+x$$
$$P_2(x) = 1-x$$
$$P_3(x) = x+x^2$$

T היא העתקה לינארית המעתיקה את המרחב הנ"ל לעצמו כך שמתקיים:

$$T(P_1(x)) = 1$$
$$T(P_2(x)) = 2+x$$
$$T(P_3(x)) = x^2$$

הוכח ש: $\lambda=1$ הנו ע"ע ומצא בסיס למרחב העצמי הנתון (ו"ע).

פתרון:

למעשה נתון ש:

$$T(1+x)=1 \quad , \quad T(1-x)=2+x \quad , \quad T(x+x^2)=x^2$$

תחילה נמצא את T בצורה מפורשת ואז נמצא את המטריצה המייצגת אותה ואז נמצא לה ע"ע וגם ו"ע.

יהי $v = a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. כיוון ש- $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ הם איברי הבסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ניתן להציג כל וקטור ב- $\mathbb{R}_2[x]$ כצרוף לינארי שלהם.

לכן נחפש $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש:

$$a+bx+cx^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(x+x^2) =$$

נפתח סוגריים: $= \alpha_1 + \alpha_1 x + \alpha_2 - \alpha_2 x + \alpha_3 x + \alpha_3 x^2 =$

נקבץ לפי מקדמים של x: $= (\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)x + \alpha_3 x^2$

$$\Downarrow$$

נשווה מקדמים:

מקדם חופשי: $a = \alpha_1 + \alpha_2$

מקדם של x: $b = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

מקדם של x^2: $c = \alpha_3$

$$\Downarrow$$

נבודד את $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

מהמשוואה I: $\alpha_1 = a - \alpha_2$

ממשוואה II: $\alpha_2 = \alpha_1 - b + c$

$\alpha_3 = c$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = a - (\alpha_1 - b + c) = a - \alpha_1 + b - c$$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha_1 = a+b-c$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\alpha_1 = \frac{a+b-c}{2}} \\ \Downarrow \\ \alpha_2 = \frac{a+b-c}{2} - b + c = \frac{a+b-c-2b+2c}{2} = \boxed{\frac{a-b+c}{2}} \\ \boxed{\alpha_3 = c} \end{array} \right.$$

המשך

אמרנו ש: $a+bx+cx^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(x+x^2)$

נציב את $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ שקיבלנו:

$$a+bx+cx^2 = \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{a-b+c}{2}(1-x) + c(x+x^2)$$

נפעיל על זה את T משני האגפים:

$$T(a+bx+cx^2) = T\left(\frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{a-b+c}{2}(1-x) + c(x+x^2)\right) =$$

תכונה של ה"ל שניתן להפריד סכום $\rightarrow$ $= T\left(\frac{a+b-c}{2}(1+x)\right) + T\left(\frac{a-b+c}{2}(1-x)\right) + T\left(c(x+x^2)\right) =$

שוב תכונת ה"ל סקלר יוצא החוצה $\rightarrow$ $= \frac{a+b-c}{2}\cdot T(1+x) + \frac{a-b+c}{2}\cdot T(1-x) + c\cdot T(x+x^2) =$

$$= \frac{a+b-c}{2}\cdot 1 + \frac{a-b+c}{2}\cdot(2+x) + c\cdot x^2 =$$ כעת נציב את הנתון:

$$= \underbrace{\frac{a+b-c}{2} + a-b+c}_{} + \left(\frac{a-b+c}{2}\right)x + cx^2 =$$ נפתח סוגריים:

$$= \boxed{\frac{3a-b+c}{2} + \left(\frac{a-b+c}{2}\right)x + cx^2}$$

זוהי ההעתקה T בצורה מפורשת.

כעת נמצא את המטריצה המייצגת אותה בבסיס הסטנדרטי של $R_2[x]$.

הבסיס הסטנדרטי הוא - $\{1, x, x^2\}$. לכן:

$$T(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x = 1.5 + 0.5x$$

נציב $a=1$
$b=c=0$

$$T(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = -0.5 - 0.5x$$

נציב $b=1$
$a=c=0$

$$T(x^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2 = 0.5 + 0.5x + x^2$$

נציב $c=1$
$a=b=0$

נציב את המקדמים בעמודות המטריצה:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בס״ד

$$\left|\lambda I-[T]\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & \lambda+0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

נציב $\lambda=1$, נחשב את הדטרמיננטה ונראה שהיא שווה ל-0.

$$\begin{vmatrix} 1-1.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1+0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

זוהי דטרמיננטה עם שורת אפסים ולכן היא שווה ל-0.

נמצא ו״ע לע״ע 1 :

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\cdot(-2)\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x-y+z=0 \\ y=0 \\ z=t \end{matrix} \text{ נסמן } \Rightarrow \begin{cases} z=t \\ y=0 \\ x=-t \end{cases}$$

המרחב העצמי הוא:

$$V_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\}$$

נציב $t=1$ ונקבל ו״ע שהוא בסיס למרחב העצמי:

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$