# אלגברה לינארית תרגיל 9 תשע"ט

**שאלה 1:**

א) האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right\}=:B\subseteq\mathbb{R}^3$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$?

**פתרון:**

נשים לב שהוקטורים בת"ל, לכן נשלים את הקבוצה לבסיס.

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\ \middle|\ \underset{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא משוואות מתארות את ה span

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\1&2&b\\0&4&c\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&2&b-a\\0&0&c-2b+2a\end{array}\right)$$

בשביל שלא נקבל שורת סתירה. $c-2b+2a=0$

ניקח וקטור $v$ שלא שייך לספן כלומר שאינו מקיים את המשוואה.

לדוגמא $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

לכן $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה בת"ל, ומספר האיברים בה שווה ל $\dim\mathbb{R}^3=3$ לכן לפי השילוש הינם בסיס.

ב) $S:=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ הקבוצה בת"ל שהרי

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\0&4&1\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

ולכן אין משתנים חופשיים והוקטורים בת"ל

ולכן לפי השילוש, הינם בסיס ל $\mathbb{R}^3$. $\dim(\mathbb{R}^3)=|S|=3$

(ג) $S=\{x+1, x^2+2x+1, x^3-x+1\}$

בשאלה 8 ראינו כי הקבוצה בת"ל, אך $|S|=3$ ו-

$\dim R_3[x]=4$ לכן נשלים לבסיס

נמצא את $Span(S)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & -1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-c-d \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & b-a-c+2d \end{array}\right)$$

לכן המשוואה שמתארת את ה-Span היא:

$$b-a-c+2d=0$$

ניקח פולינום $a+bx+cx^2+dx^3$ שלא מקיים את המשוואה

למשל לדוגמא $a=b=c=0$

$d=1$

אזי הפולינום $x^3 \notin Span(S)$ ונוסיף אותו ל-S

לכן הקבוצה $\{x+1, x^2+2x+1, x^3-x+1, x^3\}$ בת"ל

$\dim R_3[x] = |S| = 4$

לכן לפי השלישי חינם הקבוצה $\{x+1, x^2+2x+1, x^3-x+1, x^3\}$ בסיס

ל-$R_3[x]$

(ד) $S=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$

הקבוצה ת"ל מתרגיל 8, ~~הוכח~~ והמטריצה הת"ל היא $\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$

נוציא אותה מהקבוצה לקבלת קבוצה בת"ל

ונחפש מטריצה שאינה צ"ל של האחרות כדי להשלים ל-$R^{2x2}$

נמצא משוואות ל-$Span(S)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & d \end{array}\right) \xleftrightarrow{\text{לאחר ניקוי שורות ופעולות}}$$

$$-3a-3b+3c+3d=0$$

כלומר

$$a+b-c-d=0$$

נבחר מטריצה $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ שלא מקיימת את המשוואה.

לדוגמא $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ולכן הקבוצה $S=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל

$\dim R^{2\times2} = |S| = 2\cdot2=4$ ולכן לפי השלישי הינם בסיס ל $R^{2\times2}$.

**שאלה 2:**

**סעיף א.**

$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid z=2y,\ y=x\right\}$. ניתן לסמן את הפרמטר $x=t$ , ולקבל כי המרחב נראה כך $V_1=\left\{\begin{pmatrix}t\\t\\2t\end{pmatrix} \mid t\in\Re\right\}$. זהו מרחב ממימד 1, ולכן בסיס אפשרי יהיה - $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ .

**סעיף ב.**

$V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid y=x-z\right\}$. נסמן כפרמטרים $x=t,\ z=s$ ונקבל כי ניתן לכתוב את המרחב כך $V_2=\left\{\begin{pmatrix}t\\s\\t-s\end{pmatrix}\in\Re^3 \mid y=x-z\right\}$ . זהו מרחב ממימד 2. בסיס אפשרי - $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ (התקבל כאשר מציבים בווקטור הראשון $t=1,s=0$ ובשני $t=0,s=1$).

נעיר כי ניתן לבחור את הפרמטרים אחרת, לייצג את x דווקא כתלות ב- y וב- z. באופן כזה נקבל בסיס כזה $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, למשל.

**סעיף ג.**

$V_4=\left\{A\in\Re_{2\times 2} \mid A^t=A\right\}$. ניתן לרשום את המרחב כך: $V_4=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\Re\right\}$. (שימו ♥ כי אין הכרח כי איברי האלכסון יהיו שווים זה לזה!) זהו מרחב ממימד 3 , וניתן להציג עבורו בסיס כזה: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. בסיס זה התקבל כאשר מציבים במטריצה הראשונה: $a=1,b=0,c=0$ במטריצה השנייה: $a=0,b=1,c=0$ ובמטריצה השלישית: $a=0,b=0,c=1$

שאלה 3:

יהי $V$ מ"ו ממימד סופי, נגדיר $\dim V=n$. יהי $U\subseteq V$

ת"מ. יהי בסיס לU $B=\{u_1,...,u_k\}$ $\dim U\leq \dim V$

כלומר $k\leq n$.

נשלים את $B$ לבסיס של $V$.

נפריד למקרים - אם $k=n$ אזי $\dim V=\dim U$ וגם $Span(B)=V$

כלומר $U=V$ לכן ניקח $W=\{0\}$ ומתקיים

$$U+\{0\}=U=V$$

וכן $U\cap\{0\}=\{0\}$

אם $k<n$ אזי $\dim U<\dim V$

לכן קיים $w_{k+1}\in W$ כך ש $w_{k+1}\notin Span\{B\}$ שהרי

אחרת $k=n \Rightarrow Span\{B\}=V$.

לכן הקבוצה $B\cup\{w_{k+1}\}$ בת"ל

נקרא לקבוצה זאת $B'$

נמשיך את התהליך $n-k$ פעמים

וסה"כ נקבל

$$\{u_1,...,u_k,w_{k+1},...w_n\}$$

בת"ל שהרי $w_{i+1}\notin Span\{B,w_1,...w_i\}$

נסמן $W=Span\{w_{k+1},...w_n\}$

ואכן מהבנייה מתקיים $V=U\oplus W$

מ.ש.ל

**<u>שאלה 4:</u>**

פיתרון:

א.נבדוק תחילה האם הוקטורים תלויים לינארית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 0 & -1 & 6 & z-2x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right)$$

לעמודה השלישית אין איבר מוביל לכן הקבוצה היא תלויה לינארית ,המימד שלה 2 ולכן אינה בסיס.

ב. לפי סעיף א קיבלנו כי הוקטור $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ תלוי לינארית בוקטורים האחרים.המימד של U הוא 2 והבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ג. $U \cap W$ מהווה תת-מרחב של $R^3$ המורכב מפתרונות של המערכת

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$z=t, y=\frac{1}{3}t, x=z-y=\frac{2}{3}t \Rightarrow$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, t\right)=t\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

לכן מימד של $U \cap W$ שווה ל1, ובסיס לדוגמא $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

ה.תחילה נמצא בסיס ומימד לW-

$$W=\{(x,y,z) | x+y-z=0\}=span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

שהרי מרחב הפיתרונות של המערכת ההומוגנית של $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ הוא $span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. ולכן המימד של W הוא 2 והבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$U+W=span\{U \cup W\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ תלויה לינארית,ולכן לאחר שנשים את הוקטורים בעמודות ונדרג נקבל כי הוקטור $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ תלוי לינארית בשאר הוקטורים.

סך הכל הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ והמימד 3, ולכן הוא בסיס של V ממשפט מההרצאה.

ו.סך הכל ראינו כי: $\dim(U+W)=3$ $\dim(\mathrm{U}\ \cap \mathrm{W})=1, \dim(U)=2, \dim(W)=2$

ואז אכן השוויון מתקיים:

$$3=\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(\mathrm{U}\ \cap \mathrm{W})=2+2-1=3$$

**שאלה ז:** יהי $V=\mathrm{Span}\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3,\ 2-x+x^2-3x^3\}$ ת"מ של $R_3[x]$

נמצא בסיס ומימד:

ראשית נמיר כל פולינום $a+bx+cx^2+dx^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

נבדוק האם יש תלות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2+R_3 \\ R_4 \to R_4+2R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_4 \\ R_1 \to R_1+R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 \to R_1+3R_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3 \leftrightarrow R_1$$

נכתוב לפי סדר:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ①\ R_1 \to -R_1 \\ ②\ R_1 \to R_1+R_2 \\ ③\ R_2 \to -R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & -2 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לסיכום השורה השלישית אין איבר מוביל לכן $2-x+x^2-3x^3$
תלוי בפולינומים האחרים
לכן הבסיס של $V$ הוא $\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3\}$
והמימד 2