חקר ביצועים - הרצאה 10

19 בינואר 2012

סימפלקס דואלי

נפתור דוגמה:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 2x_1 + x_2 \\ s.t &: 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ & \quad 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & \quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

נעבור לצורה סטנדרטית:

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

נעשה סימפלקס דואלי:

בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	-2	-1	0	0	0	0
x_3	0	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	0	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	0	1	2	0	0	1	3
יחס		$\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$	$\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$				

בחירת משתנה יוצא: אגף ימין השלילי ביותר. במקרה הזה, במשוואה של z.
בחירת משתנה נכנס: מסתכלים על מנות המקדמים במשוואה של z עבור המקדמים השליליים.
בבעיית מינימום נבחר את המנה הקטנה ביותר. בבעיית מקסימום נבחר את המנה הקטנה ביותר בערך מוחלט.
אם אין איברים שליליים בשורה של המשתנה היוצא אז אין פתרון אפשרי.
אז האיטרציה הבאה:

בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_3	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1
יחס		$\frac{2}{5}$			1		

במקרה זה בחרנו באופן שרירותי את המשתנה היוצא כי שניהם -1.

בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	0	-1	1	1	0

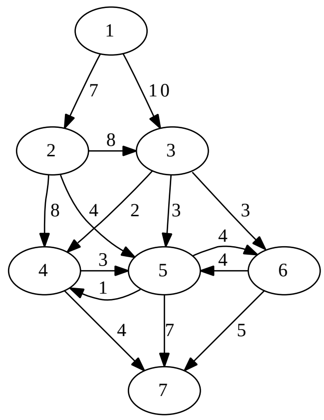
כל ה-RHS חיוביים, לכן סיימנו.

רשתות - נושא חדש

הגדרות

גרף - קבוצה של נקודות וקבוצה של קווים המקשרים בין זוגות מסויימים של נקודות.
הנקודות נקראות צמתים (nodes) או קדקדים.
הקווים נקראים קשתות (arcs) (או צלעות או ענפים).
רשת (network) - גרף שמתקיימת בו זרימה כלשהי, לדוגמה זרימת כלי רכב בכביש, זרימה ברשת חשמל וכו'.
כל קשת יכולה להופיע כקשת מכוונת (directed arc) - כלומר הזרימה בה יכולה להתבצע בכיוון אחד בלבד (כמו בכביש חד סיטרי), או כקשת לא מכוונת (undirected arc), כלומר הזרימה בה יכולה להתבצע לשני הכיוונים.
רשת שבה הקשתות מכוונות תיקרא רשת מכוונת (directed network).
ורשת שבה הקשתות לא מכוונות תיקרא רשת לא מכוונת.
(הערה: רשת המכילה קשתות מכוונות וקשתות לא מכוונות ניתן להפכה לרשת מכוונת ע"י כך שמחליפים כל קשת לא מכוונת ב2 קשתות בעלות כיוונים מנוגדים).
מסלול (**path**) = סדרה של קשתות שונות המחברות 2 צמתים.
קיבולת זרימה של ענף - חסם עליון לזרימה האפשרית בענף.
מקור - צומת שיש זרימה ממנו ואין זרימה אליו.
יעד - צומת שכל הענפים שמחוברים אליו מכוונים כלפיו.

זרימה מקסימלית



ברשת שלפנינו יש זרימה, במקומות מסויימים היא דו כיוונית.
המספרים ליד הקשתות מתארים את קיבולת הזרימה.
לדוג' מצומת 4 לצומת 2 אפשר להזרים עד 7 אבל מצומת 2 לצומת 1 אין זרימה.
הזרימה המקסימלית מאופיינת בכך שיש רשת זרימה בעלת מקור יחיד ויעד יחיד, נדרוש את שימור הזרימה - כלומר כל מה שנכנס לצומת יוצא ממנה והצומת לא אוגרת בתוכה.
נגדיר את קיבולת הזרימה מצומת i לצומת j ע"י c_{ij}. בדוגמה שלנו $c_{45} = 3$, $c_{54} = 1$.
ננסח את הבעיה כבעיה של תכנון לינארי (למרות שלא נפתור ע"י סימפלקס).
המטרה - זרימה מקסימלית מ1 ל7.
משתני החלטה - x_{ij} זרימה מצומת i לצומת j.
אילוצים - אילוצי קיבולת, $x_{ij} \le c_{ij}$ לכל i, j.
אילוצי חוק שימור זרימה - לכל k:

$$\sum_i x_{ik} = \sum_j x_{kj}$$

כדי לשמור שמה שנכנס לצומת הוא מה שיוצא.
אילוצי אי שליליות - $x_{ij} \ge 0$.
אם היינו פותרים ע"י סימפלקס הייתה לנו טבלה של 57×37 - וזה קשה לפתור.
פונק' המטרה לא תהיה סכום של כל x_{ij} אלא כל מה שמזרימים מהמקור או כל מה שנקלט ביעד. כלומר:

$$\max\ F = x_{12} + x_{13}$$

או

$$\max\ F = x_{47} + x_{57} + x_{67}$$

שתי פונק' המטרה הנ"ל זהות כי מיקסום הזרימה ההתחלתית ימקסם את כמות הזרימה הסופית.
מקסימום זרימה יוצאת במקרה זה היא $17 = 10 + 7$ ומקסימום זרימה נכנס היא $16 = 5 + 7 + 4$ ולכן כבר רואים כי הפתרון חסום ע"י 16.

שיטת הפתרון

שלב 1 - נמצא מסלול בעל קיבולת חיובית מהמקור ליעד.
לדוגמה - $7 \to 4 \to 2 \to 1$.
שלב 2 - חפש לאורך השביל שנבחר את הענף בעל הקיבולת המינימלית c. אצלנו $c = 4$.
שלב 3 - הקטן את קיבולת הזרימה של כל ענף במסלול בc.
וכך ממשיכים.