פתרון תרגיל 6 ליניארית להנדסה תשעח

להגשה בתרגול, בשבוע המתחיל ב־ ט"ו כסלו, 3.12

6 בדצמבר 2017

1. תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A,B הפיכות וגם $A+B\neq 0$ אז $A+B$ הפיכה.

ב. אם A הפיכה אז $tr(A)\neq 0$.

ג. אם $A^2=A$ אז $A=I$ או A איננה הפיכה.

ד. אם ב־A יש עמודות אפסים אז A איננה הפיכה.

<u>**פיתרון**</u>:

א. הפרכה: ניקח $A=I\in\mathbb{R}^{2\times 2},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ נקבל ש $A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\neq 0$ אך זו מטריצה עם שורת אפסים ולכן לא הפיכה.

ב. הפרכה: ניקח את B מסעיף א.

ג. הוכחה: נניח $A^2=A$. אם $A=I$ סיימנו. אחרת (כלומר, $A\neq I$) נקבל ש־ $0=A-A=A^2-A=A(A-I)$, וכיון ש־$A-I\neq 0$ נובע ש־A מחלקת אפס ולכן לא הפיכה.

ד. הוכחה: נניח בשלילה שהיא הפיכה ונניח שעמודת האפסים היא i. אזי קיימת מטריצה B כך ש־ $BA=I$. לפי כפל עמודה עמודה נקבל

$$C_i(BA)=C_i(I)$$

$$\Downarrow$$

$$BC_i(A)=e_i$$

$$\Downarrow$$

$$0=B\cdot 0=e_i$$

בסתירה לכך שיש 1 במיקום ה־i של e_i (לפי הגדרה).

2. תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות, כך ש־A הפיכה. הוכיחו:
v פיתרון למערכת $Bx=0$ אם ורק אם v פתרון למערכת $(AB)x=0$.

<u>פיתרון</u>:

$\Leftarrow$: נניח v פתרון למערכת $Bx=0$. לכן $(AB)v=A(Bv)=A\cdot 0=0$, ולכן v פתרון למערכת $(AB)x=0$.

$\Rightarrow$: נניח v פתרון למערכת $(AB)x=0$, כלומר $(AB)v=0$. A הפיכה ולכן קיימת הופכית A^{-1}, נכפיל בהופכית משמאל את שני האגפים ונקבל

$$A^{-1}(AB)v=A^{-1}0$$

ולכן

$$Bv=0$$

ו־v פתרון למערכת $Bx=0$.

3. נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^{n\times n}$ כלומר, אוסף המטריצות הריבועיות מסדר n.
א. הוכיחו שהבאים הינם תתי מרחבים של $\mathbb{R}^{n\times n}$:
(a) $U=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|\forall i\neq j: A_{i,j}=0\}$ כלומר, אוסף המטריצות האלכסוניות.
(b) $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|\forall i,j: A_{i,j}=-A_{j,i}\}$ כלומר, אוסף המטריצות האנטי־סימטריות.
(c) $V=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|tr(A)=0\}$ כלומר, אוסף המטריצות עם עקבה 0.
ב. הוכיחו או הפריכו:
(a) $U\cup W$ תת מרחב.
(b) $U\cup V$ תת מרחב.
(c) $W\cup V$ תת מרחב.

<u>פיתרון</u>:

א. ראשית קל לראות שמטריצת האפס היא אלכסונית, אנטי־סימטרית ועם עקבה 0. כעת נראה סגירות לחיבור וכפל בסקלאר:

עבור U: יהיו $A_1,A_2\in U,\alpha\in\mathbb{R}$ צריך להראות שלכל $i\neq j$ מתקיים $(A_1+\alpha A_2)_{i,j}=0$. מחוקי חיבור מטריצות וכפל בסקלאר נקבל ש־

$$(A_1+\alpha A_2)_{i,j}=(A_1)_{i,j}+\alpha(A_2)_{i,j}\overset{*}{=}0+\alpha\cdot 0=0$$

כאשר השיוויון $*$ נובע מכך ש־A_1,A_2 אלכסוניות (שייכות ל־U).

עבור W: יהיו $A_1,A_2\in W,\alpha\in\mathbb{R}$ צריך להראות שלכל i,j מתקיים $(A_1+\alpha A_2)_{i,j}=(-(A_1+\alpha A_2))_{i,j}$. ואכן (שוב חוקי חיבור וכפל בסקלאר):

$$(A_1+\alpha A_2)_{i,j}=(A_1)_{i,j}+\alpha(A_2)_{i,j}\overset{*}{=}(-A_1)_{i,j}+\alpha\cdot(-A_2)_{i,j}=(-(A_1+\alpha A_2))_{i,j}$$

כאשר השיוויון $*$ נובע מכך ש־A_1,A_2 אנטי־סימטריות.

עבור V: יהיו $A_1, A_2 \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ צריך להראות ש־$\sum\limits_{i=1}^{n}(A_1+\alpha A_2)_{i,i}=0$. ואכן, לפי חוקי חיבור מטריצות וכפל בסקלאר:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_1+\alpha A_2)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}(A_1)_{i,i}+\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}(A_2)_{i,i}\overset{*}{=}0+\alpha\cdot 0=0$$

כאשר השיוויון $*$ נובע מכך ש־A_1, A_2 עם עקבה 0.

ב. $U \cup W$ לא תת מרחב: ניקח את $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \in U \setminus W$ שהיא אלכסונית ולא אנטי סימטרית (באנטי סימטרית האלכסון 0 כפי שהוכחנו בתרגול) ולכן באיחוד, וניקח את $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \in W \setminus U$ שהיא אנטי סימטרית ולא אלכסונית ולכן באיחוד. החיבור ביניהן יוצא $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ שהיא לא אלכסונית ולא אנטי סימטרית ולכן לא באיחוד.

$U \cup V$ לא תת מרחב: ניקח את מטריצת היחידה $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \in U \setminus V$ אלכסונית עם עקבה $2 \neq 0$, וניקח את $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \in V \setminus U$ שהיא עם עקבה 0 ולא אלכסונית. החיבור ביניהן יוצא $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ שהיא לא אלכסונית ולא עם עקבה 0. ולכן לא באיחוד.

$V \cup W$ תת מרחב כי $W \subseteq V$ שהרי ראינו בתרגול שלכל מטריצה אנטי־סימטרית מתקיים שאיברי האלכסון שלה הם 0, ולכן העקבה גם 0.

4. יהי V מ"ו, ויהיו $u=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \in V$ שני וקטורים. הוכיחו ש־u, v תלויים ליניארית אם ורק אם $ad-bc=0$.

<u>**פיתרון:**</u>

$\Leftarrow$: נניח u, v תלויים ליניארית, אזי יש $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ כך ש־ $\alpha_1 v+\alpha_2 u=0$. אם $\alpha_2=0$, נקבל $\alpha_1 v=0$ ולכן $v=0$ וסיימנו. לכן נניח $\alpha_2 \neq 0$. נקבל את המערכת:

$$\begin{cases}a\alpha_1+c\alpha_2=0\\ b\alpha_1+d\alpha_2=0\end{cases}$$

ומכאן ש־ $c=-\frac{\alpha 1}{\alpha 2}a, d=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}b$. נציב אותם:

$$ad-bc=a\cdot(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}b)-b\cdot(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}a)=0$$

$\Rightarrow$: נניח $ad-bc=0$. צריך למצוא צ"ל לא טריוויאלי של u, v שמאפס. אם $d \neq 0$ נבחר $\alpha_1=d, \alpha_2=-b$ ונקבל $\alpha_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc\\bd-bd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
אחרת נקבל $bc=0$, ולכן $b=0 \vee c=0$. אם $c=0$ אז $v=0$ ולכן הם ת"ל. אם $b=0$ אז הקואורדינטה השנייה בשני הוקטורים היא 0 ולכן הם פרופורציונאליים (אחד כפולה של השני) ולכן כמובן שהם ת"ל.

5. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

מצא מערכת מישוואות ליניארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק U.

פיתרון:

אנו רוצים לבדוק האם וקטור כללי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in U$. זה קורה אם ורק אם למערכת המיוצגת ע"י $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & -2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & -2 & d \end{array}\right)$ יש פיתרון. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & -2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & -2 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -2 & d-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$

למערכת יש פיתרון אם ורק אם מתקיים $a-c=0, b-d=0$. לכן התשובה היא:

$$U = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} a-c=0 \\ b-d=0 \end{cases}\} = \{x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0\}$$

6. האם הקבוצה $B = \{1+x^2+2x^3, 5+x+6x^2+13x^3, -3-x-3x^2-8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0; אם לא, הראה שהצ"ל היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

פיתרון:

כפי שראינו בתרגול, שמים את הוקטורים בעמודות מטריצה, ובודקים האם הפיתרון היחיד הוא הטריוויאלי. נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטורים תלויים ליניארית אם ורק אם למטריצה המדורגת יש פיתרון לא טריוויאלי. כאן מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים בת"ל.

הערה: שימו לב שלמערכת יש פיתרון לא טריוויאלי אם ורק אם יש משתנה חופשי. כאן אין משתנה חופשי, ולכן הוקטורים בת"ל.

7. נתבונן ב- $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$. האם $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$? אם כן, מצאו את הצירוף הליניארי המתאים.

<u>**פיתרון**</u>:

נבדוק האם למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 39 \\ 4 & 1 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 5 & 23 \end{array}\right)$$

יש פיתרון. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 39 \\ 4 & 1 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 5 & 23 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פיתרון והוא הוקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. כלומר:

$$2A_1 - 2A_2 + 3A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$$

8. יהי V מ"ו ותהיינה $A,B\subseteq V$ תתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $A\cap B=\varnothing$ וגם $span(A)\cap span(B)\neq\{0\}$ אזי $A\cup B$ ת"ל.

ב. אם $span(A)\subseteq B\wedge span(B)\subseteq A$ אז $A=B$.

פיתרון:

א. הוכחה: לפי הנתון קיים $0\neq v\in V$ כך ש־ $v\in span(A)\wedge v\in span(B)$. לכן קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F},v_1,\ldots,v_n\in A$ כך ש־$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 v_1$, וקיימים $\beta_1,\ldots,\beta_m\in\mathbb{F},u_1,\ldots u_m\in B$ כך ש $v=\sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i$. כיון ש־$v\neq 0$ אזי קיים $1\leq t\leq n$ כך ש־$\alpha_t\neq 0$, $1\leq s\leq m$ כך ש־$\beta_s\neq 0$ (אחרת, אם כולם אפס, היינו מקבלים אפס). לכן נקבל:

$$0=v-v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 v_1-\sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 v_1+\sum_{i=1}^{m}-\beta_i u_i$$

שזהו צירוף ליניארי של איברי $A\cup B$. כיון שנתון $A\cap B=\phi$ נובע שזהו צירוף לא טריוויאלי שנותן 0 (הסבר: המקדם של v_t שונה מאפס בסכום הראשון, ו־v_t לא חלק מהסכום השני, והמקדם של u_s שונה מאפס בסכום השני ולא חלק מהסכום הראשון. לכן שניהם נשארים שונים מאפס גם בחיבור שני הסכומים), ולכן האיחוד ת"ל.

ב. הפרכה: ניקח $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},B=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$.