# סיכום בנושא של גבולות ורציפות

24 בדצמבר 2016

**כדי להוכיח את קיום הגבול:**

א) שימוש במשפט הסנדוויץ

ב) שימוש בשיטת ההצבה

ג) לפי ההגדרה

**כדי להפריח את קיום הגבול:**

א) בהינתן פונקציה רציונאילית, אם סכום של חזקות המשתנים של כל מחובר שוות שבמונה שווה לסכום החזקות של כל מחובר שבמכנה אזי אפשר להישתמש בהצבה: $x = ky$.

למשל: $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy}$.

**הערה:**

באופן כללי, בהינתן פונקציה רציונאילית, אם החזקה המינימלית מבין כל המחוברים שבמונה גדולה ממש מהזקה המקסימלית מבין המחוברים שבמכנה, אפשר לנסות להוכיח לפי אחת השיטות אשר צויינו, אבל אם החזקה המינימלית מבין המחוברים שבמונה היא קטנה או שווה לחזקה המקסימלית מבין כל המחוברים שבמכנה, אזי צריך להיזהר בחישוב הגבול,

למשל: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)=(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, כאן ממבט ראשון נראה שלפונקציה יש גבול בנקודה $(0,0)$ כי חזקה 3 שבמונה צריכה לנצח את המכנה, אבל ראינו בכיתה שאין גבול לפוקציה הזו בראשית הצירים, שימו לב שחזקה מינימלית שבמונה היא שווה חחזקה המקסימלית שבמכנה.

ב) בדרך כלל קל מאוד לחשב גבולות חוזרים, אם מקבלים שהגבולות קיימים ושונים זה מזה אז ראינו שהגבול הכפול לא קיים:

למשל: $f\left(x,y\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ לפונקציה זו אין גבול בראשית הצירים.

ג) כאשר אנו שואפים ל־$\left(0,0\right)$ ודרגת החזקות שבמונה קטנה מאשר דרגת החזקות שבמכנה, אז הפונקציה שלנו בערך מוחלט שואפת ל־$\infty$:

למשל: $lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\frac{x^2+y^2}{x^4+x^4}$, גבול של פונקציה זו בראשית הצירים הוא אינסוף.

**הערה:**

כאשר דיברנו על גבול של פונקציה במשתנה 1 , יכולנו לשאוף לנקודה רק משני צדדים: או מימין או משמאל, כאשר אנחנו מדברים על פוקציות מרובות משתנים $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, כאשר $f$ היא פונקציה סקלרית, אזי אפשר לשאוף לנקודה מאינסוף כיוונים, ואם יש גבול לפונקציה בנקודה אזי הוא לא תלוי במסלול עליו נשאף לנקודה, תמיד נקבל את אותו הגבול. ולכן כדי להפריך את קיום הגבול, מספיק למצוא שני מסלולים שונים, אליהם נשאף לנקודה, אם עבורם נקבל שני גבולות שונים אזי אין לפונקציה גבול בנקודה.

**אריטמטיקה של גבולות עבור פונקציות מרובות משתנים**

**משפט:**

יהיו $f\left(\bar{x}\right)$ ו־$g\left(\bar{x}\right)$ פונקציות כאשר $\bar{x}$ הוא וקטור של משתנים, ונניח שבן מוגדרות בסביבת הנקודה $\overline{x_0}$. נניח גם שקיימים הגבולות $lim_{\bar{x}\to\overline{x_0}}f\left(\bar{x}\right)$ ו־$lim_{\bar{x}\to\overline{x_0}}g\left(\bar{x}\right)$ אזי:

א) $lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}\left[f\left(\bar{x}\right)\pm g\left(\bar{x}\right)\right]=lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}f\left(\bar{x}\right)\pm lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}g\left(\bar{x}\right)$

ב) $lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}\left[f\left(\bar{x}\right)\cdot g\left(\bar{x}\right)\right]=lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}f\left(\bar{x}\right)\cdot lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}g\left(\bar{x}\right)$

ג) אם בנוסף $lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}g\left(\bar{x}\right)\neq0$ אזי $lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}\frac{f\left(\bar{x}\right)}{g\left(\bar{x}\right)}=\frac{lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}f\left(\bar{x}\right)}{lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}}g\left(\bar{x}\right)}$

**דוגמאות:**

א) נחשב את הגבול של $\frac{x\cdot sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ כאשר $\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)$:

קודם כל $x\to0$ כאשר $\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)$,

נתבונן ב־$\frac{sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ , נציב $t=x^2+y^2$ , ברור ש־$t\to0$ כאשר $\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)$ ולכן:

$$lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\frac{sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=lim_{t\to0}\frac{sint}{t}=1$$

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל שהגבול של פונקציה שלנו הוא 0.

ב) נחשב את הגבול של $e^{-\frac{\left|x-y\right|}{x^2-2xy+y^2}}$ כאשר $\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)$

נסמן $t=x-y$ ברור ש־$t\to0$ ואז:

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}=lim_{t\to0}e^{-\frac{|t|}{t^2}}=0$$

ג) נבדוק את קיום הגבול של $\frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$ כאשר $(x,y,z)\to(0,0,0)$:

חזקה של המכנה היא 4 והאינטואיציה אומרת שהמכנה אמור למצח את המונה שחזקתו היא 3 , ננסה להפריך את קיום הגבול:

נבחר את הפרבולה $z=x^2$, $x=y$ ונקבל שהגבול הוא $\frac{1}{3}$, ואם נשאף על נקודה על ציר ה־$z$ כלומר אם נבחר את המסלול $x=y=0$ , $z$ כלשהוא, אזי נקבל שהגבול הוא 0 , ולכן אין גבול בנקודה $(0,0)$.

**רציפות**

**תזכורת: כדי שפונקציה תהיה רציפה בנקודה היא צריכה להיות מוגדרת בנקודה וגם הגבול של פונקציה בנקודה חייב להיות שווה לערך של הפונקציה בנקודה.**

**משפט:**

תהיינה $f,g$ פונקציות מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}$, שתיהן רציפות בתחום כלשהוא $D$, אזי:

א) $f+g$ רציפה ב־$D$

ב) $f-g$ רציפה ב־$D$

ג) $f\cdot g$ רציפה ב־$D$

ד) $\frac{f}{g}$ רציפה בכל אותן נקודות של $D$ שבהן המכנה לא מתאפס.

**משפט:**

תהי $f$ פונקציה ממשית של $n$ משתנים, המוגדרת בסביבה של $x_0$, ונניח שהיא רציפה ב־$x_0$ אזי $f$ רציפה באותה נקודה לפי כל משתנה בנפרד, באופן פורמלי:

$g(x_i)=f\left(x_0^1,x_0^2,...,x_i,...,x_0^n\right)$ רציפה ב־$x_0$ עבור כל $0\le i\le n$.

**משפט (תזכורת מההרצאה):**

יהי $n\ge1$. לכל $1\le i\le n$ הפונקציה, המתאימה לכל $x\in\mathbb{R}^n$ את הרכיב ה־$i$ שלו, נקראת הטלה ומסומנת $\pi_i$, כלומר:

$\pi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\pi_i(x)=x_i$, כאשר $x=(x_1,x_2,....,x_n)$.

ראיתם בהרצאה שכל הטלה היא רציפה ב־$\mathbb{R}^n$.

וכמסכנה מהמשפט הקודם אנחנו מקבלים את הטענה הבאה:

**טענה: פוליום בכמה משתנים הוא רציף.**

**הוכחה:**

יהי $f\left(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n\right)$ פולינום ב־$n$ משתנים, ותהי $\pi_i$ הטלה על המשתנה ה־$i$שלו: $\pi_i\left(f\left(x_1,..,x_i,..,x_n\right)\right)=x_i$, ראינו שהטלה היא רציפה בכל נקודה של $\mathbb{R}^n$ ולכן $x_i$ היא פונקציה רציפה לכל $1\leq i\leq n$, אבל $f$ היא סכום סופי של פונקציות מהצורה $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ , כל מכפלה כזאת היא רציפה כמכפלה של רציפות, ולכן גם $f$ היא רציפה כסכום של רציפות.

**משפט (רציפות של הרכבה של פונקציות רציפות):**

תהי $f$ פונקציה מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}^k$, ותהי $g$ פונקציה מ־$\mathbb{R}^k$ ל־$\mathbb{R}$. אם $f$ רציפה בתחום $D$ ואם $g$ רציפה בתחום $f\left(D\right)$ , אז $g\circ f$ רציפה בתחום $D$ כלפונקציה מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}$.

**דוגמאות:**

א) נמצא את הגבול של $\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$ כאשר $x\to\infty$ וגם $y\to\infty$:

קודם כל חשוב לזכיר שקיום הגבול הוא תכונה אסימפטוטית, ולכן כאשר $x\to\infty$ וגם $y\to\infty$ אזי אפשר להיתעלם מה$x,y$ שליליים כי הם לא ישפיעו לנו על הגבול בסופו של דבר, ולכן נתבונן באותם $x,y$ אי שליליים:

$0\leq\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{-(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}\leq\frac{x^2+2xy+y^2}{e^{x+y}}=\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}=\frac{t^2}{e^t}$, כאשר הצבנו $x+y=t$ ולכן ברור ש־$t\to\infty$ כאשר $x,y\to\infty$ וקל לראות לפי לופיטל שצד ימין של אי שוויון שואף לאפס, וגם צד משאל שלו שואף לאפס ולכן הגבול של הפונקציה שלנו הוא אפס.

**הערה: שימו לב שלא ניתן להישתמש בכלל הלופיטל עבור פונקציה ביותר ממשתנה אחד, ולכן מה שעשינו כאן, ע"י הצבה הפכנו את הפונקציה שלנו לפונקצי במשתנה אחד, ואז השתמשנו בכלל לופיטל.**

ב) נחשב את הגבול של פונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ כאשר $x,y\to\infty$:

נראה ע"י משפט הסנדוויץ כי הגבול הוא אפס:

קודם כל ננסה לחסום את הפונקציה שלנו בערך מוחלט ע"י איזו שהיא פונקציה ששאופת לאפס:

$\left(x-y\right)^2\geq0$ ולכן $x^2+y^2\geq2xy$ ולכן $x^2-xy+y^2\geq xy$, מצד שני $xy\leq|xy|$ ולכן ביחד נקבל $|x^2-xy+y^2\geq x^2-|xy|+y^2\geq|xy|$

ולכן $0\leq\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leq\frac{|x+y|}{|xy|}\leq\frac{|x|}{|xy|}+\frac{|y|}{|xy|}=\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\to0$, ולכן מכלל הסנדוויף

נקבל ש־$0 \rightarrow \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|$ מה שגורר שגם הפונקציה שלנו שואפת לאפס.

ג) האם ניתן להגדיר את הפונקציה $\frac{x^2+y^2}{sin(x^2+y^2)}$ כך שתהיה רציפה בנקודה $(0,0)$?

התשובה היא שכן, משום שקל לראות מהצבה $t=x^2+y^2$ שהגבול בראשית הצירים קיים ושווה לאחד, ולכן נגדיר אותה להיות 1 בראשית הצירים ו־$\frac{x^2+y^2}{sin(x^2+y^2)}$ בכל מקום אחד.

ד) נראה ש־$g(x,y)=max\left\{sin(x+y),y^3\right\}$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$:

קודם כל נזכר בנוסחה הבאה: $max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ ולכן $g(x,y)=\frac{sin(x+y)+y^3+\left|sin(x+y)-y^3\right|}{2}$ היא פונקציה רציפה כי היא סכום והרכבה של פונקציות רציפות.

**רשימה של משפטים אשר מהווים הכללה של משפטים עבור פונקציות במשתנה 1**

**משפט1 (משפט הראשון של ויירשטראס)**

תהי $f$ פונקציה מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}$, ותהי $A$ קבוצה קומפקטית, החלקית לתחום ההגדרה של $f$.
אם $f$ רציפה ב־$A$ אז $f$ חסומה ב־$A$.

**משפט 2(משפט השני של ויירשטראס)**

תהי $f$ פונקציה $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$. אם $f$ רציפה בקבוצה קומפקית $A$ החלקית לתחום הגדרתה אז $f$ מקבלת את המקסימים ואת המינימום שלה ב־$A$.

**משפט 3:**

תהי $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, ותהי $A$ קבוצה קומפקטית, החלקית לתחום הגדרה של $f$, אם $f$ רציפה ב־$A$ אזי $f$ רציפה במ"ש ב־$A$.

**משפט 4 :**

תהי $f$ פונקציה סקלרית בעלת $n$ משתנים. $f$ רציפה בקבוצה $A$, כאשר כל שתי נקודות השייכות ל־$A$, ניתנות לקישור בה. תהיינה $a$ ו־$b$ שתי נקודות כלשהן ב־$A$. אז לכל מספר ממשי $c$, הנמצא בין $f(a)$ ל־$f(b)$ , קיימת לפחות נקודה אחת $x_0\in A$ שעבורה מתקיים: $f(x_0)=c$.