

י"ט אלול תשס"ט, 8.9.09

**חשבון אינפיניטיסימלי 2: 88-133-08****מועד ב'**

זמן הבחינה: 120 דקות. חומר עזר אינו מותר למעט מחשבון פשוט. המבחן הוא בן שני עמודים.  
משקל כל שאלה הוא 20 נקודות.

**חלק א' – ענה על שלוש שאלות מתוך הארבע:**

**שאלה 1.** תהא  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  ו-  $g(x)$  בעלת נגזרת רציפה בקטע  $[c, d]$ . הוכח כי הפונקציה המורכבת  $g(f(x))$  היא אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

**שאלה 2.** תהא  $\{f_n(x)\}$  סדרה של פונקציות רציפות בקטע  $[a, b]$  שמתכנסת לפונקציה גבולית  $f(x)$  שם. א. הוכח שאם ההתכנסות היא במידה שווה אז  $f(x)$  רציפה בקטע.

ב. הוכח או הפרך: אם  $f(x)$  רציפה בקטע אז ההתכנסות היא בהכרח במידה שווה שם.

**שאלה 3.** תהא  $f(x)$  פונקציה המוגדרת לכל  $x > 0$  כך ש:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  אך  $f$  אינה שווה זהותית לאפס בקטע  $(0, \infty)$ . נגדיר סדרת פונקציות:  $f_n(x) = f(nx)$ . לאיזו פונקציה גבול היא מתכנסת? האם ההתכנסות היא במידה שווה?

**שאלה 4.** תהא  $f(x, y)$  פונקציה מוגדרת במלבן  $D = [-1, 1]^2$  ונתון שלכל  $y_0 \in [-1, 1]$  קבוע הפונקציה  $\varphi(x) = f(x, y_0)$  היא רציפה. נניח גם כי הנגזרת  $f_y(x, y)$  קיימת וחסומה בכל  $D$ . הוכח כי  $f(x, y)$  רציפה ב- $D$ .

**חלק ב' – ענה על שתי שאלות מתוך השלוש:**

**שאלה 5.** מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה:  $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ .  
איזו תופעה מתרחשת כאן שאינה יכולה להתרחש במקרה של פונקציות של משתנה אחד?

**שאלה 6.** א. קבע האם האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$  מתכנס.

ב. קבע עבור אילו ערכי  $\alpha$  האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$  מתכנס.

**שאלה 7.** חשב את סכום הטור  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ . נמק את צעדיך.

(הדרכה: אפשר לחשב:  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .)

**בהצלחה!**