אינפי 2 – תרגיל 7

.1

a. תהי f רציפה ב $[a,b]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ הוכח ש $g(x)=f(x+\alpha)$ אינטגרבילית ב $[a-\alpha,b-\alpha]$ ומתקיים $\int_a^b f(x)dx=\int_{a-\alpha}^{b-\alpha} g(x)dx$

פתרון: f אינטגרבילית לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T - $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ עם פרמטר חלוקה $\lambda(T)<\delta$ כל סכום רימן על החלוקה קרוב ל $L=\int_a^b f(x)dx$ עד כדי ε כלומר $\left|\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i)\right)-L\right|<\varepsilon$ כאשר $c_i\in[x_i,x_{i+1}]$.

כעת, לכל חלוקה של הקטע $[a-\alpha,b-\alpha]$, $a-\alpha=y_0<y_1<\ldots<y_n=b-\alpha$ עם פרמטר חלוקה קטן מ δ ניתן לזהות חלוקה של הקטע $[a,b]$ ששווה ל $a=y_0+\alpha<y_1+\alpha<\ldots<y_n+\alpha=b$ עם אותו פרמטר חלוקה כמובן. ולכן $\sum_{i=0}^{n-1} g(c_i)(y_{i+1}-y_i)=\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i+\alpha)(y_{i+1}+\alpha-y_i-\alpha)$ כאשר $c_i\in[y_i,y_{i+1}]$ ולכן $c_i+\alpha\in[y_i+\alpha,y_{i+1}+\alpha]$. לכן הטור הימני הוא סכום רימן של חלוקה של הקטע $[a,b]$ עם פרמטר חלוקה קטן מ δ ולכן $\left|\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i+\alpha)(y_{i+1}+\alpha-y_i-\alpha)\right)-L\right|<\varepsilon$ ומתוך השיווין קיבלנו $\left|\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(c_i)(y_{i+1}-y_i)\right)-L\right|<\varepsilon$ כפי שרצינו. (למעשה הראנו ש g אינטגרבילית ב $[a-\alpha,b-\alpha]$ ושהאינטגרל המסויים בקטע זה הוא בדיוק האינטגרל $L=\int_a^b f(x)dx$).

$a+\alpha=x_0+\alpha<x_1+\alpha<\ldots<x_n+\alpha=b+\alpha$ $[a+\alpha,b+\alpha]$ חלוקה של

b. תהי f רציפה ב $[-L,L]$ ומחזורית עם מחזור $2L$, ויהי $c\in\mathbb{R}$. הוכח ש f אינטגרבילית ב $[c,c+2L]$ ומתקיים $\int_{-L}^{L} f(x)dx=\int_c^{c+2L} f(x)dx$. האם f רציפה על כל הממשיים?

פתרון: נגדיר את הסדרה $a_k=c+2kL$ כך ש $k\in\mathbb{Z}$. ניקח את ה k המינימלי כך ש $a_k\geq -L$ ברור לכן ש $a_{k-1}=c+2(k-1)L<-L$ ולכן $-L\leq a_k=c+2kL=c+2(k-1)L+2L<-L+2L=L$ קיבלנו $-L\leq a_k<L$ (ובמילים פשוטות a_k הינו c מודולו $2L$).

נחלק את הקטע $[-L,L]$ לשני הקטעים $[-L,a_k]$ ו $[a_k,L]$. ברור ש $\int_{-L}^{L} f(x)dx=\int_{-L}^{a_k} f(x)dx+\int_{a_k}^{L} f(x)dx$. כעת נחלק את הקטע $[c,c+2L]$ לשני קטעים.

מתחלק ל $[c,c+2L]=[a_k-2kL,a_k-2kL+2L]$

$[a_k-2kL,a_k-2kL+L-a_k]=[a_k-2kL,L-2kL]$ (מתאים לקטע $[a_k,L]$)

ולקטע $[-2kL+L,a_k-2kL+2L]=[-L-2(k-1)L,a_k-2(k-1)L]$ (מתאים לקטע $[-L,a_k]$)

נוכיח שהאינטגרל של הפונקציה על הקטעים המתאימים שווה, ולכן סה"כ האינטגרל על הקטעים שווה.

נגדיר $g(x)=f(x+2kL)$. f רציפה ב $[a_k,L]$ ולכן לפי סעיף 1 הפונקציה g אינטגרבילית ב $[a_k-2kL,L-2kL]$ ומתקיים $\int_{a_k}^{L} f(x)dx=\int_{a_k-2kL}^{L-2kL} g(x)dx$. אבל f מחזורית עם מחזור $2L$ ולכן $g(x)=f(x+2L\cdot k)=f(x)$ ולכן קיבלנו $\int_{a_k}^{L} f(x)dx=\int_{a_k-2kL}^{L-2kL} f(x)dx$.

עבור הקטע השני נגדיר $g(x)=f(x+2(k-1)L)$ ונקבל בצורה דומה $\int_{-L}^{a_k} f(x)dx=\int_{-L-2(k-1)L}^{a_k-2(k-1)L} f(x)dx$ וסיימנו.

בוודאי שהפונקציה אינה חייבת להיות רציפה על כל הממשיים. היא יכולה להיות לא רציפה בנקודות kL, לדוגמא ההשלמה המחזורית של הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x)=x$ בקטע שבין $[-1,1]$, עם מחזור 2.

2.

a. תהי f אינטגרבילית ב$[a,b]$, הוכח ש $|f|$ אינטגרבילית בקטע (רמז: משפט שהוכחנו בתרגיל)

פתרון: למדנו בכיתה שאם f אינטגרבילית ו g רציפה אזי $g\circ f$ אינטגרבילית. ניקח $g(x)=|x|$ ולכן $g\circ f=|f|$ אינטגרבילית כפי שרצינו.

b. יהיו f,g אינטגרביליות ב$[a,b]$. הוכח שהפונקציות $\max(f,g)$ ו $\min(f,g)$ אינטגרביליות ב$[a,b]$. (רמז: הצג את הפונקציות האלה באמצעות f,g וערכים מוחלטים)

פתרון: קל לוודא ש $\min(f,g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}, \max(f,g)=\frac{|f-g|+f+g}{2}$. בעזרת סעיף א' זה סכום של אינטגרביליות כפול קבוע, ולכן אינטרגבילי.

3.

a. חשב את אורך העקום של הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ בקטע $[a,b]$.

פתרון: $f(x)=\cosh(x)$. $\sqrt{1+f'^2}=\sqrt{1+\sinh^2}=\sqrt{\cosh^2}=\cosh=f$ (זה נכון תמיד כי f תמיד חיובית). ולכן אורך העקום הינו

$$L_{[a,b]}=\int_a^b\sqrt{1+f'^2}dx=\int_a^b\cosh dx=\sinh|_a^b=\sinh(b)-\sinh(a)$$

b. תהי f גזירה על כל הממשיים. הוכח שלכל $M>0$ קיים קטע $[a,b]$ כך שאורך העקומה של הפונקציה בקטע זה גדול מ M.

פתרון: $L_{[a,b]}=\int_a^b\sqrt{1+f'^2}dx\ge\int_a^b\sqrt{1}dx=b-a$ ניקח $a=0,b>M$ לקבל את הנדרש.

4. תהי f רציפה ב$[a,b]$ הוכח ש $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. (תזכורת מאינפי 1:
תהי סדרה a_n. אם לכל $\varepsilon>0$ קיימות סדרות $c_n\to L+\varepsilon$, $d_n\to L-\varepsilon$ כך ש
$\forall n: d_n\le a_n\le c_n$ אזי $a_n\to L$)

הוכחה:

אם $\max|f|=0$ התרגיל טריוויאלי, לכן נניח $\max|f|>0$. בנוסף, נזכר שלכל קבוע $a>0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

קודם כל ברור ש$\left(\int_a^b|f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(\left(\max|f(x)|\right)^n\int_a^b dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max|f(x)|\sqrt[n]{b-a}\to\max|f|\cdot 1$

מצד שני יהי $\max|f|>\varepsilon>0$. מכיוון ש f רציפה גם $|f|$ רציפה, ולכן היא מקבלת את המקסימום בקטע נניח בנקודה x_m. כמו כן, קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in[a,b]$ מקיים $|x-x_m|<\delta$ אזי $|f(x)|>\max|f|-\varepsilon$ נגדיר את הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\max|f|-\varepsilon & x\in[a,b],|x-x_m|<\delta\\ 0 & x\in[a,b],|x-x_m|\ge\delta\end{cases}$. ברור ש $|f(x)|\ge g(x)$ וברור ש $\left(\max|f|-\varepsilon\right)^n\delta\le\int_a^b g^n(x)dx$ [למה דווקא δ ולא 2δ?].

לכן, $\left(\int_a^b|f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\ge\left(\int_a^b g^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}\ge\left(\max|f|-\varepsilon\right)\sqrt[n]{\delta}\to\max|f|-\varepsilon$.

(קל לראות שעבור $\varepsilon\ge\max|f|$ הצד הזה טריוויאלי, שכן אינטגרל על פונקציה אי שלילית הינו אי שלילי).

לפיכך לכל ε מצאנו סדרות כמו ברמז

$\left(\max|f|-\varepsilon\right)\sqrt[n]{\delta} \le \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \max|f|\sqrt[n]{b-a}+\varepsilon$ ולכן הגבול הינו $\max|f|$ כפי שרצינו.

5. חשבו את גבול הסדרה $b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} ie^{\frac{i^2}{n^2}}$

פתרון: $b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{\frac{i^2}{n^2}}$ שזה בדיוק סכום רימן בקטע $[0,1]$ לפונקציה xe^{x^2} לחלוקה $1,\ldots,\frac{1}{n-1},\frac{1}{n}$ עם פרמטר חלוקה $\frac{1}{n}$. הגבול של סכומי הרימן כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס הינו האינטגרל המסוים בקטע. לסיכום $b_n \to \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}|_0^1 = \frac{e-1}{2}$

6. חשב את האינטגרלים הבאים:

a. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

פתרון: נסתכל על האינטגרל $\int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{t}dt$ ונבצע את ההצבה $x=\ln t$ (אנחנו עושים את זה הפוך פעם אחת כדי שתבינו את ההצבה ההפוכה, בדומה למה שעשינו עם האינטגרל הלא מסוים).

מקבלים $dx=\frac{dt}{t}$, $e^x=t$, $1\le t\le 2 \Leftarrow \ln(1)\le x\le \ln(2)$ ולכן $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = \int_1^2\frac{\sqrt{t-1}}{t}dt$ כעת

נבצע הצבה נוספת $u^2=t-1$. לכן $2udu=dt$, $0\le u\le 1 \Rightarrow 1\le t\le 2$ ולכן

$$\int_1^2\frac{\sqrt{t-1}}{t}dt=\int_0^1\frac{u}{u^2+1}2udu=2\int_0^1\frac{u^2+1-1}{u^2+1}du=2\int_0^1 1-\frac{1}{1+u^2}du=2\left(u-\arctan u\right)_0^1=2-2\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}$$

b. $\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx$ (רמז: הצבה טריגונומטרית)

פתרון: $x=\sin t$, $dx=\cos tdt$ לכן

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx=\left\{\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos tdt\end{matrix}\right\}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-\sin t^2)^3}\cos tdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos^3 tdt=\left\{\begin{matrix}f'=\cos t\\ g=\cos^3 t\end{matrix}\right\}=\sin t\cos^3 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=$$

[שימו לב ש $\sin t\cos^3 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$ מכיוון שזו פונקציה אי זוגית (חשוב מאד! לא לשכוח!)]

$$=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 tdt=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt$$

כעת $4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\begin{Bmatrix} f'=1 \\ g=\cos^2 t\end{Bmatrix}=3t\cos^2 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t2\cos t\sin tdt=$

$$=-\frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t-1dt=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}$$

ולכן $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{3\pi}{8}$

7. חשבו את $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt$ עבור $f(t)$ רציפה.

פתרון: f רציפה ולכן ידוע שהפונקציה $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ הינה קדומה של f, כלומר $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$.

לכן $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt=\frac{d}{dx}\left(F(x^2)-F(0)\right)=2xf(x^2)$