<u>אזהרה:</u> מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2},3\right) \times \left(\frac{1}{2},3\right) \times \dots$ **לא פתוחה** ב - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ <u>לא פתוחה</u> ב – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

<u>הסבר:</u> $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$

כאן $I = \mathbb{N}$ $\quad (X_n, \tau_n) = \mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז – $(a,b)^{\mathbb{N}} \in \tau_\pi = \gamma^{\cup}$. לכן

$(a,b)^{\mathbb{N}} \Leftarrow$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \subseteq (a,b) \times (a,b) \times \dots$.

אבל זה גורר $\mathbb{R} \subseteq (a,b)$, סתירה!

<u>**טענה שימושית**</u>: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n$ בסיס ל $\tau_{\prod}$.

עבור מכפלה אינסופית: $\left\{\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \,\middle|\, J \subseteq I \text{ סופי}, O_j \in \gamma_j\right\}$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)
  $\dots, Sep, B_1, B_2, Metriz, \dots$
- (מכפלות סופיות)

$discr, \quad LComp$ (קומפקטיות מקומית)

<u>**הגדרה:**</u> מ"ט X הוא **קומפקטי מקומית** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.
שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$.

דוגמאות: מרחב דיסקרטי, $\mathbb{R}^n$, כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...
תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

<u>הערה:</u> "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה <u>אינסופית</u> (סופית – כן!).

<u>תרגיל:</u> $\mathbb{R}^n \in LComp$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה בסיסית $U := U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

לכן הטלה $\mathbb{R} = p_{m+1}(U) = p_{m+1}(V)$ עם תמונה רציפה $\mathbb{R}$ (שהיא לא קומפקטית) ...

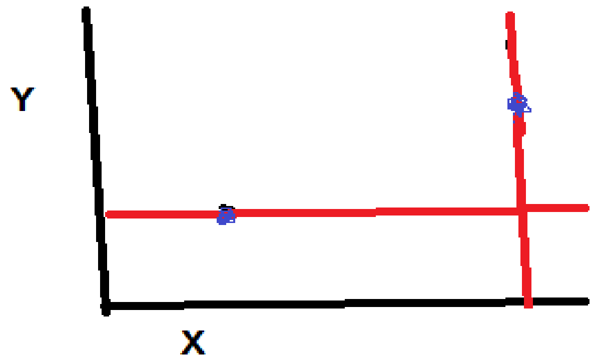
<u>הערה</u>: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית בת מנייה.

למשל $C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור.

<u>תרגיל</u>: א. $\{x\} \times Y \simeq Y \quad X \times \{y\} \simeq X$.

ב. הוכיחו $X, Y \in Conn \Leftrightarrow X \times Y \in Conn$.

רמז: כדאי להיעזר ב (א) ובמשפט האלומות (השירשור).



<u>הערה:</u> מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in Metr$$

$$\to \left(X_1, \underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\right), \left(X_2, \underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\right) \in TOP$$

<u>טענה</u>: יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π - "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקה בסגנון אוקלידס" –

$$d(x,y) := \sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2 + \rho_2(x_2,y_2)^2}$$

ב) $d_1(x,y) := \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y) := \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$

- <u>תרגיל:</u>

א) $d\sim d_1\sim d_{max}$ מ - $X := X_1 \times X_2$.

ב) $\underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}} = \underbrace{top(d) = top(d_1) = top(d_{max})}_{(\text{א}) \Rightarrow}$

<u>מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה:</u>

$$X = \prod_{i\in\mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots$$

$d(x,y) := \sup\{\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \mid i\in\mathbb{N}\}$ אחת מהאפשרויות.

- <u>תרגיל:</u> לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x,f(x)) | x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופלוגי}} \subset X\times Y$.

רמז: כדאי להשתמש בפונקצית ההטלה.

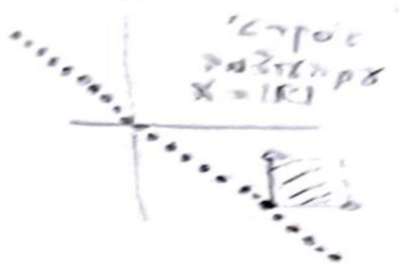
- <u>תרגיל:</u> הוכיחו $X\in T_2 \Leftrightarrow \Delta_X := \{(x,x) \mid x\in X\}$ סגור ב $X\times X$.
- <u>תרגיל:</u>* הוכיחו שאם $f: X\to Y$ רציפה ו $Y\in T_2$ אז $Gr(f)$ סגור ב $X\times Y$

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?

- תרגיל:* הוכיחו: $cl(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} cl(A_i)$ לכל $A_i \subseteq (X_i, \tau_i)$.
- <u>תרגיל:</u> * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R},\tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

רמז: $\{[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta) : a,b\in\mathbb{R}, \varepsilon>0, \delta>0\}$

בסיס למישור סורגנפראי ....



הגדרה: נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - (G,τ) מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau) \in TGr$ חבורה טופולוגית $(Topological\ Group)$ אם מתקיים:

א. "כפל" $a \cdot b \mapsto (a,b)$ $\quad G \times G \xrightarrow{\cdot} G$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a,b \in G\ \forall U \in N(ab)\ \exists V_1 \in N(a), V_2 \in N(b) \quad V_1V_2 \subseteq U$

ב. "ההיפוך": $a \mapsto a^{-1}$ $\quad G \to G$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a \in G\ \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1})$

תרגיל: לנסח בעזרת סדרות מתכנסות אם G מטריזבילי (או B_1).

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E, +, \tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z}, +, \tau_p)$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרת של TGr - (א) $\not\Leftarrow$ (ב).

למשל $(\mathbb{R}, +, \tau_s)$ בטופולוגית סורגנפראי.

תזכורת: $\mathbb{R} \supseteq O \in \tau_s \overset{def}{=} \forall\, x \in O\ \exists \epsilon > 0 : [x, x+\epsilon) \subseteq O$

למשל – $[0,1) \in \tau_s$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0\ but\ \lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$.

תרגיל: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית היא הומוגנית.

לסקרנים:

- (על חבורות טופולוגיות)

באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html ראו קבצים :

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/IntroTopGr.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrNotes070217.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrEx.pdf

- (על מכפלה טופולוגית) https://en.wikipedia.org/wiki/Product_topology

קומפקטיות "הכללה גאונית של סופיות"

(תזכורת): מרחב טופולוגי הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי.

תכונות ודוגמאות:

- כל מרחב סופי הוא קומפקטי.
- $Comp \ni \left(X, \tau_{cofinite}\right)$

הסבר: קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט אולי למספר סופי של נקודות.

- $X \text{ is finite} \Leftrightarrow (X, \tau_{discr}) \in \text{Comp}$

הסבר: $\{\{x\} : x \in X\}$ כיסוי פתוח של X.

- **הגדרה:** תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(\text{Y}, \tau_Y) \in \text{Comp}$.

משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית): התנאים הבאים שקולים:

א) Y תת קבוצה קומפקטית ב – X.

ב) לכל אוסף $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ של קבוצות פתוחות ב – X שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$) קיים תת אוסף סופי $\{O_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq I$ סופי שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$).

הסבר: נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

- איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

תרגיל: תת קבוצות $Q,\ Q \cap [0,1]$ לא קומפקטיות. (רמז: משפט Heine-Borel)

תרגיל: $Y = [0,1]$ בקו סורגנפראי $(\mathbb{R}, \tau_s)$ לא קומפקטי.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y. כיסוי $\{1\}$ $\alpha := \bigcup_{n \ge 2} [0, \frac{n-1}{n}) \cup \{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y ללא תת כיסוי סופי.

- **משפט:** אם (X, d) מ"מ קומפקטי (ז"א $Comp \ni \left(X, top(d)\right)$) אזי

א. (X,d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in Sep$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

<u>הוכחה</u>: א **תזכורת:** לכל ε-כיסוי $\{B(x,\varepsilon):x\in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε-צפוף ב (X,d) אז $A:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. **<u>טענת</u>**: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A)=X$) בת מניה A ב X. בגלל המטריזביליות $\mathrm{scl(A)}=\mathrm{cl(A)}$. לכן נקבל $\mathrm{scl(A)}=X$.

לכל איבר $x\in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $a_n\in A, x=\lim a_n$. נגדיר פונקציה

$$\sigma:\mathrm{X}\to \mathrm{P(A)}\quad \sigma(x)=\{a_n\,|\,\mathrm{n}\in\mathbb{N}\}\subseteq \mathrm{A}$$

זאת פונקציה **<u>חח"ע</u>**. לכן $card\,\mathbb{R} = 2^{\aleph_0} \geq card\ P(\mathrm{A}) \geq \mathrm{card}(\sigma(\mathrm{X})) = card(X)$.

■

<u>הערה:</u> אפשר להוכיח את החסימות ישר כך:

ניקח $z\in X$, אז – $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(z)$

כיסוי פתוח. יש תת כיסוי <u>סופי</u> ואז – $\exists n_0 : X = B_{n_0}(z)$ לכן

$$diam\,X \le 2n_0$$

- **<u>הערה:</u>** קומפקטיות לא תורשתית – $\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp} \subset \underbrace{[0,1]}_{\in Comp}$

$(\alpha:=\{(\frac{1}{n},1):n\in\mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" של $(0,1))$

אבל יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות <u>סגורות</u>.

<u>משפט:</u> נניח $X\in Comp$, $Y\subseteq X$ תת קבוצה <u>סגורה</u>. אז גם $Y\in Comp$.

<u>הוכחה:</u>

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב – X כך ש – $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$

<u>הרעיון:</u> להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^* = \alpha \cup \{Y^c\}$.
הוא בעצם <u>כיסוי פתוח</u> של X.

$X \in Comp$ ⇐ קיים תת כיסוי <u>סופי</u> $\gamma \subseteq \alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ – γ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y. לכן נקבל תת אוסף סופי ל – α (ולא ל - α^*) שמכסה את Y. אז $Y \in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

<u>משפט:</u> תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

<u>הוכחה:</u> $X \in Comp$. f רציפה ועל $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Comp$.

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של Y. צ"ל – קיים כיסוי <u>סופי</u>.

$Y = \bigcup_{i\in I} O_i$ ⇐

$X = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$.

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ כיסוי <u>פתוח</u> של X $\quad$ ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש – f רציפה).

$X \in Comp$ ⇐ קיים תת כיסוי סופי ל - $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש –

$$X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$$

אז מכאן – $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j\in J} O_j$

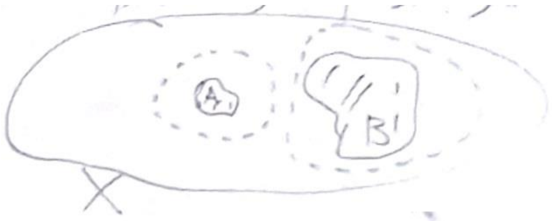
(תמיד $ff^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם f על אז $ff^{-1}(A) = A$)

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j\in J}$ ל – α.

■

<u>תרגיל:</u> נניח $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a,b]) = [c,d]$.

<u>משפט (ההפרדה):</u> נניח $X \in T_2$, A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



<u>הוכחה:</u>

<u>מקרה א'</u> – $A = \{a\}$

<u>הערה:</u> קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B\ \exists U_b \in N(a)\ \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו - V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b \in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X.

בגלל קריטריון (3) $\Leftarrow$ קיים תת כיסוי <u>סופי</u> –

$$\exists\ \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \underbrace{=:}_{\text{נסמן}} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B. נגדיר בהתאמה –

$$N(a) \ni U \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

מ - (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a. כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$ –

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

<u>מקרה ב' (כללי)</u> –

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A\ \exists U_a \in N(a)\ \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a\in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X.

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר – $N(B) \ni V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supseteq B$ V פתוח בגלל - (t_2).

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

■

- **<u>משפט (הסגירות):</u>** נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב – X.

<u>הוכחה:</u>

ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל – $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.

■

<u>משפט (הנורמליות):</u>

$$X \in T_4 \Leftarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$$

<u>הוכחה:</u> A, B תת קבוצות סגורות וזרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■

<u>משפט:</u> נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה **סגורה.**

<u>הוכחה:</u>

צ"ל $f(A)$ סגורה ב – Y לכל A סגורה ב – X.

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in Comp$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in Comp$.

לפי משפט – תמונה רציפה שומרת על $Comp$. נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם) –

$$T_2 \ni Y \supseteq f(A) \in Comp$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).

■

<u>משפט (הכללת משפט ויירשטראס):</u> נניח $X \in Comp$, $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ומקבלת Max, Min מוחלטים.

<u>הוכחה:</u>

$Comp$ נשמרת ע"י תמונה רציפה. לכן – $\mathbb{R} \supset f(X) \in Comp$

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב - $\mathbb{R}$, אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R} \ni B := \sup\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R} \ni A := \inf\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X) = \overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B = Max\, f$$

$$A = Min\, f$$

$\blacksquare$

<u>תרגילים:</u>

1) נניח (X,d) מ"מ, $A,K \subseteq X$ לא ריקות, $K \in Comp$. אזי:

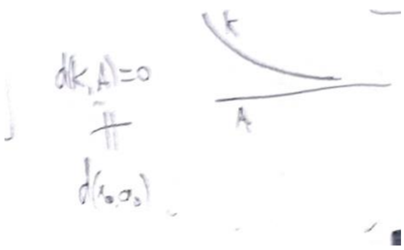
א) קיימת נקודה $x_0 \in K$ כך ש – $\boxed{d(K,A) = d(x_0,A)}$

<u>רמז:</u> פונקציית המרחק...

ב) אם גם $A \in Comp$, אז – $\exists a_0 \in A, \exists x_0 \in K: \boxed{d(K,A) = d(x_0,a_0)}$

<u>דוגמה נגדית</u> (אפילו לקבוצות סגורות):

ב - $\mathbb{R}^2$:



ב - $\mathbb{R}$: $\underbrace{B = \left\{ n + \frac{1}{2n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, A = \mathbb{N}}_{\text{סגורות}}$

$0 = d(A,B) \neq d(a_0,b_0)$ (לכן inf לא מתקבל!)