תרגיל בית 8 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. תהי $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה כך ש-$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_n$ הוכיחו כי יש ל-E תת־שדה K כך ש-$[K:\mathbb{Q}] = 2$.

שאלה 2. תהי $E = \mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה. נניח שקיים $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כך ש-$\sigma(\alpha) = \alpha^2$.

א. האם ייתכן כי $[E:\mathbb{Q}] = 2$? אם כן, מצאו α מתאים.

ב. האם ייתכן כי $[E:\mathbb{Q}] = 3$? אם כן, מצאו α מתאים.

שאלה 3. נסמן שורש יחידה $\rho = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ מסדר 3. חשבו את הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{Q}$ של $2\rho + \sqrt[3]{49}$.

רמז: העזרו בשאלה 1 מתרגיל בית 7 ובפעולה של חבורת גלואה המתאימה.

שאלה 4. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E. נניח שחבורת גלואה $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא אבלית. יהי a שורש של $f(x)$.

א. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו כי $E = \mathbb{Q}(a)$.

שאלה 5. יהי F שדה ממאפיין שונה מ-2, ויהי K שדה הפיצול של פולינום מתוקן ספרבילי $f(x) \in F[x]$. נסמן את שורשי $f(x)$ ב-$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. נגדיר את הדיסקרימיננטה של $f(x)$ להיות

$$\Delta(f) \coloneqq \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

א. בדקו שהדיסקרמיננטה של $x^2 + bx + c$ זה מה שאתם חושבים שזה.
זה קצת יותר קשה להראות שהדיסקרמיננטה של $x^3 + ux + v \in \mathbb{Q}[x]$ היא $4u^3 + 27v^2$.
הדיסקרימיננטה כשמה כן היא: לפולינומים ב-$\mathbb{R}$ היא "מאבחנת" את מספר השורשים הממשיים.

ב. הוכיחו כי $\Delta(f) \in F$. רמז: חילופים ב-S_n.

ג. נתבונן ב-$G \coloneqq \mathrm{Gal}(K/F)$ כתת־חבורה של S_n, ונסמן $G_0 = G \cap A_n$. הוכיחו כי $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right] = K^{G_0}$. רמז: מה היא ההגדרה של תמורה זוגית?

ד. הסיקו כי G משוכנת ב-A_n אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)} \in F$.

שאלה 6 (רשות לא קשה). יהיו שני פולינומים

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, \qquad g(x) = (x^2-2)(x^2-3)$$

ראינו שיש להם את אותו שדה פיצול $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. כמובן שחבורת גלואה $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ פועלת על השורשים של $f(x), g(x)$. הזכרו כי השורשים של $f(x)$ הם $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}, \pm\sqrt{2} \mp \sqrt{3}$ ושל g הם $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$. הוכיחו כי הפעולות לא איזומורפיות.
רמז: בשפה פשוטה מבקשים להראות שלא משנה איך נמספר את השורשים, הפעולות שונות.
אפשר קודם לשים לב שתת־החבורות המתאימות ב-S_4 אינן צמודות למשל.

בהצלחה!