פתרון תרגיל בית 7 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י' טבת ה'תשע"ז, 8.1.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. חשבו את $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Q})$.

פתרון. החבורה $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Q}$ אבלית, ולכן $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Q}$.

שאלה 2. יהיו $f : G \to H$ ו-$g : H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f : G \to K$ היא הומומורפיזם.

פתרון. יהיו איברים $g_1, g_2 \in G$. מתקיים $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ כי f הומומורפיזם. נסמן את התמונה שלהם $h_i = f(g_i)$. מפני ש-g הומומורפיזם, אז $g(h_1h_2) = g(h_1)g(h_2)$. לכן בהרכבה $(g \circ f)(g_1g_2)$ שווה

$$g(f(g_1g_2)) = g(f(g_1)f(g_2)) = g(f(g_1)) \cdot g(f(g_2)) = (g \circ f)(g_1) \cdot (g \circ f)(g_2)$$

שאלה 3. תהינה G, H שתי חבורות, ונסמן $K = G \times \{e_H\}$. הוכיחו כי $G \cong K$ וגם $K \lhd G \times H$.

פתרון. יש להוכיח שהפונקציה $f : G \to K$ המוגדרת לפי $f(g) = (g, e_H)$ היא איזומורפיזם.
תת־החבורה K נורמלית ב-$G \times H$ כי היא הגרעין של ההומורפיזם $p : G \times H \to H$ השולח איבר (g, h) ל-h. בדרך אחרת, אפשר להראות ש-K נשמרת תחת הצמדה.

שאלות להגשה

שאלה 4 (ממבחן)**.** תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$ איברים לא טריוויאלים (כלומר שונים מאיבר היחידה) המקיימים $aba^{-1} = b^2$.

א. הוכיחו כי $a^5ba^{-5} = b^{32}$.

ב. נניח כי $o(a) = 5$. מצאו את $o(b)$.

פתרון.

א. נשים לב כי $2^5 = 32$ ונציב חמש פעמים את הנתון:

$$\begin{aligned}b^{32} &= \left(b^2\right)^{16} = \left(aba^{-1}\right)^{16} = aba^{-1}aba^{-1}\ldots aba^{-1} = ab^{16}a^{-1} = \\ &= a\left(b^2\right)^8a^{-1} = a^2\left(b^2\right)^4a^{-2} = a^3\left(b^2\right)^2a^{-3} = a^4b^2a^{-4} = a^5ba^{-5}\end{aligned}$$

ב. לפי הנתון $a^5=e$, ולכן גם $a^{-5}=e$. נעזר בסעיף הקודם ונקבל $b=a^5ba^{-5}=b^{32}$. לכן $b^{31}=e$. כלומר הסדר של b מחלק את 31. מפני ש-31 ראשוני, הסדרים האפשריים הם 1 או 31. לפי הנתון, b אינו איבר היחידה (שהוא האיבר היחידה מסדר 1), ולכן בהכרח $o(b)=31$.

שאלה 5. מצאו כמה הומומורפיזמים $f:\mathbb{Z}_{49}\to S_9$ קיימים. האם קיים מונומורפיזם?

פתרון. החבורה $\mathbb{Z}_{49}$ ציקלית, ולכן הומומורפיזם שהיא התחום שלו נקבע לחלוטין לפי תמונה של יוצר. במילים אחרות, נניח $\mathbb{Z}_{49}=\langle a\rangle$, אז $f(a^i)=f(a)^i$ לכל i. הסדר של $f(a)$ צריך לחלק את הסדר של a, לפי תרגיל שעשינו. האפשרויות עבור $o(f(a))$ הן $1,7,49$. אם $o(f(a))=1$, אז מדובר בהומומורפיזם הטריוויאלי. אם הסדר של $f(a)$ הוא 7, אז יש למצוא כמה איברים מסדר 7 יש ב-S_9. איבר מסדר 7 ב-S_n הוא מכפלה של מחזורים זרים שכולם מאורך 7. בחבורה S_9 רק מחזור אחד באורך 7 מתאים. יש $\binom{9}{7}(7-1)!$ מחזורים מאורך 7 ב-S_9 לפי התרגיל שעשינו בכיתה (ולכן גם מספר כזה של איברים מסדר 14). אין איברים מסדר 49 ב-S_9, ולכן בסך הכל יש $\binom{9}{7}(7-1)!+1=25921$ הומומורפיזמים $f:\mathbb{Z}_{49}\to S_9$.

אין מונומורפיזם $f:\mathbb{Z}_{49}\to S_9$ כי אין איברים מסדר 49 ב-S_9. או למשל כי ראינו שהתמונה של הומומורפיזם כזה יכולה להיות רק מסדר 1 או 7, ולכן f לא יכול להיות חח"ע. לעומת כמה פתרונות שהוגשו, אין חשיבות לכך ש-S_9 לא אבלית.

שאלה 6. מצאו דוגמאות לשתי חבורות לא אבליות מסדר 216 והוכיחו שאינן איזומורפיות.

פתרון. יש 177 חבורות מסדר 216, עד כדי איזומורפיזם. רק תשע מתוכן הן אבליות, אז יש הרבה מקום לבחירה. אפשר לשים לב ש-$24|216$, ולכן הדוגמאות משאלה 10 יכולות לשמש מקור השראה.

אפשר לבחור למשל את $G=D_{108}$ ואת $H=D_{18}\times D_3$. בחבורה G יש איברים מסדר 108, ואילו בחבורה H הסדר המירבי של איבר הוא 18. האם אתם יכולים להוכיח ששתיהן הן לא איזומורפיות לחבורה $D_{18}\times\mathbb{Z}_6$? שימו לב שלא כל בחירה דומה של חבורות דיהדרליות מתאימה. הוכיחו ש-$D_{2(2m+1)}\cong D_{2m+1}\times\mathbb{Z}_2$, ולכן למשל $D_{54}\times\mathbb{Z}_2\cong D_{27}\times D_2$.

שאלה 7. תהי G חבורה, ותהי $H\leq G$ תת־חבורה. נגדיר את המנרמל (או הנורמליזטור) של H ביחס ב-G להיות

$$N_G(H)=\{g\in G\,|\,gH=Hg\}$$

א. הוכיחו כי $N_G(H)\leq G$.

ב. הוכיחו כי $H\lhd N_G(H)$, ומצאו דוגמה בה $N_G(H)$ אינה תת־חבורה נורמלית של G (רמז: חבורה מסדר 6 תספיק).

ג. הוכיחו $H\lhd G$ אם ורק אם $N_G(H)=G$. חשבו את $N_G(Z(G))$.

פתרון. א. המנרמל $N_G(H)$ לא ריק כי $e\in N_G(H)$, שהרי $eH=He$ לכל תת־חבורה של G. נשתמש בקריטריון המקוצר לתת־חבורה. יהיו $x,y\in N_G(H)$. לכן

$$xy^{-1}H=xHy^{-1}=Hxy^{-1}$$

כי $xH=Hx$ ומפני ש-$yH=Hy$, אז בכפל משמאל ומימין ב-y^{-1} נקבל $Hy^{-1}=y^{-1}H$. לכן $xy^{-1}\in N_G(H)$, ולכן $N_G(H)\leq G$.

ב. אנחנו יודעים שלכל $h\in H$ מתקיים $hH=H=Hh$. לכן $H\subseteq N_G(H)$, ולכן $H\leq N_G(H)$. לפי הגדרה לכל $x\in N_G(H)$ מתקיים $xH=Hx$. לכן $H\lhd N_G(H)$.

עבור הדוגמה, חייבים לבחור חבורה לא אבלית, ולכן לפי הרמז נבחר $G=S_3$.

כל תת־חבורה ציקלית של איבר מסדר 2 ב-S_3 תספיק. למשל אם $H = \langle (12) \rangle$, אז אפשר לחשב כי $N_{S_3}(H) = H$, וראינו ש-H לא נורמלית ב-S_3. לעומת כמה פתרונות שהוגשו, לפי הסעיף הקודם ראינו שהמנרמל הוא תמיד תת־חבורה, ולכן לא יתכן שהוא גם לא תת־חבורה.

ג. לפי הסעיף הקודם, אם $N_G(H) = G$, אז $H \lhd G$. מסתבר שגם ההפך נכון: אם H תת־חבורה נורמלית ב-G, אז לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$, כלומר $G = N_G(H)$. מפני שכל האיברים ב-G מתחלפים עם כל איברי $Z(G)$. לכן לכל $g \in G$ מתקיים $g \cdot Z(G) = Z(G) \cdot g$. כלומר $g \in N_G(Z(G))$, ולכן $N_G(Z(G)) = G$. זה גם מוכיח ש-$Z(G) \lhd G$.

שאלה 8. תהי G חבורה שבה לכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2017} = x^{2017} y^{2017}$. נסמן שלוש תת־קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \left\{ g^{2017} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ B &= \left\{ g^{2016} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ C &= \left\{ g \,\middle|\, g \in G, g^{2017} = e \right\} \end{aligned}$$

א. הוכיחו $A, B, C \lhd G$. צריך להוכיח שהן תת־חבורות, וגם שהן נורמליות.

ב. הוכיחו שכל איברי A מתחלפים עם כל איברי B. באופן שקול, הוכיחו שלכל $x, y \in G$ מתקיים $x^{2017} y^{2016} = y^{2016} x^{2017}$.

ג. הוכיחו שלכל $g, h \in G$ מתקיים

$$\left(ghg^{-1}h^{-1} \right)^{2017 \cdot 2016} = e$$

פתרון. א. רוב התשובות לסעיף זה הוכיחו "לפי הגדרה" שתת־הקבוצות בשאלה הן תת־חבורות. כלומר שהן לא ריקות, סגורות לפעולה וסגורות לפעולה. את הנורמליות הוכיחו לפי זה שהן נשמרות תחת הצמדה באיברי G.
ישנה דרך נוספת, שהיא יותר קצרה: נשים לב שההעתקה $f : G \to G$ המוגדרת לפי $f(g) = g^{2017}$ היא הומומורפיזם לפי הנתון בשאלה. נחשב שהגרעין של f הוא בדיוק $\ker f = C$, ולכן C היא תת־חבורה נורמלית. זהו, לא צריך יותר כלום עבור C.
נחשב גם שהתמונה של f היא $\operatorname{im} f = A$, ולכן $A \leq G$. את הנורמליות של A נוכיח לפי הצמדה. יהי $x \in G$ ויהי $a \in A$, כך ש-$a = g^{2017}$. נרצה להראות $xax^{-1} \in A$. נראה שמדובר באיבר של G בחזקת 2017 לפי

$$xax^{-1} = xg^{2017}x^{-1} = xgx^{-1}xgx^{-1} \ldots xgx^{-1} = \left(xgx^{-1} \right)^{2017}$$

כלומר $xax^{-1} \in A$, ולכן $A \lhd G$.
עבור B נצטרך להתאמץ קצת יותר. נגדיר העתקה $\phi : G \to G$ לפי $\phi(g) = g^{-2016}$. נבדוק שזהו הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} \phi(xy) = (xy)^{-2016} &= \left(y^{-1}x^{-1} \right)^{2016} = xx^{-1} \left(y^{-1}x^{-1} \right)^{2016} y^{-1}y \\ &= x \left(x^{-1}y^{-1} \right)^{2017} y = xx^{-2017}y^{-2017}y = x^{-2016}y^{-2016} = \phi(x)\phi(y) \end{aligned}$$

והתמונה שלו היא $\operatorname{im} \phi = B^{-1} = B$, כי אם $b \in B$, אז קיים g כך ש-$b = g^{2016}$, ולכן $b^{-1} = \left(g^{-1} \right)^{2016}$ (כלומר גם $b^{-1} \in B$). לכן $B \leq G$. את הנורמליות של B מוכיחים בצורה דומה להוכחת הנורמליות של A.

ב. נעזר בנתון בשאלה שלכל $x,y\in G$ מתקיים $(xy)^{2017}=x^{2017}y^{2017}$ וגם לפי הסעיף הקודם $(xy)^{2016}=y^{2016}x^{2016}$ כי

$$(xy)^{2016}=\phi((xy)^{-1})=\phi(y^{-1}x^{-1})=\phi(y^{-1})\phi(x^{-1})=y^{2016}x^{2016}$$

לכן

$$x^{2017}y^{2016}=xx^{2016}y^{2016}=x(yx)^{2016}=y^{-1}yx(yx)^{2016}=y^{-1}(yx)^{2017}=y^{2016}x^{2017}$$

כלומר $f(x)\phi(y^{-1})=\phi(y^{-1})f(x)$, ולכן גם $f(x)\phi(y)=\phi(y)f(x)$.

ג. נעזר בזהויות מהסעיף הקודם ונחשב

$$\begin{aligned}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2017\cdot 2016}&=\left(\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2017}\right)^{2016}=\left((gh)^{2017}\left(g^{-1}h^{-1}\right)^{2017}\right)^{2016}\\&=\left(g^{-1}h^{-1}\right)^{2017\cdot 2016}(gh)^{2017\cdot 2016}\\&=\left(g^{-2017}h^{-2017}\right)^{2016}\left(g^{2017}h^{2017}\right)^{2016}\\&=h^{-2017\cdot 2016}g^{-2017\cdot 2016}h^{2017\cdot 2016}g^{2017\cdot 2016}\\&=\left(h^{-2016}\right)^{2017}\left(g^{-2017}\right)^{2016}h^{2017\cdot 2016}g^{2017\cdot 2016}\\&=g^{-2017\cdot 2016}h^{-2017\cdot 2016}h^{2017\cdot 2016}g^{2017\cdot 2016}=e\end{aligned}$$

או שנוכיח בעזרת ההומורפיזמים f ו-ϕ. קל לראות שהם מתחלפים, כי לכל $x\in G$ מתקיים

$$f(\phi(x))=\left(x^{-2016}\right)^{2017}=\left(x^{2017}\right)^{-2016}=\phi(f(x))$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2017\cdot 2016}&=\left(\left(hgh^{-1}g^{-1}\right)^{2017}\right)^{-2016}=\phi\left(f\left(hgh^{-1}g^{-1}\right)\right)\\&=\phi\left(f(h)f(g)f\left(h^{-1}\right)f\left(g^{-1}\right)\right)\\&=\phi(f(h))\phi(f(g))\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)\phi\left(f\left(g^{-1}\right)\right)\\&=\phi(f(h))f(\phi(g))\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)\phi\left(f\left(g^{-1}\right)\right)\\&=\phi(f(h))\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)f(\phi(g))f\left(\phi\left(g^{-1}\right)\right)\\&=\phi\left(f(h)f\left(h^{-1}\right)\right)f\left(\phi(g)\phi\left(g^{-1}\right)\right)=\phi(e)f(e)=e\end{aligned}$$

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. כמסקנה ממשפט קיילי כל חבורה G מסדר n איזומורפית לתת־חבורה של S_n.

א. מצאו שיכון $f:Q_8\to S_8$. זה יותר קשה להראות ש-Q_8 אינה ניתנת לשיכון ב-S_7.

ב. מצאו שיכון $f:D_n\to S_n$. שימו לב שלא מדובר ב-S_{2n}.

שאלה 10. נתונות החבורות הבאות מסדר 24: S_4, $\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_4\times S_3$, $\mathbb{Z}_3\times D_4$, $\mathbb{Z}_3\times Q_8$, $\mathbb{Z}_2\times A_4$, D_{12} ו-$SL_2(\mathbb{Z}_3)$ (מטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל השדה בן שלושה איברים). בחרו כמה מהן והוכיחו שאף אחת מהן לא איזומורפית לאחרות שבחרתן.
רמז: סדר של איברים.

אגב, ישנן 15 חבורות מסדר 24 עד כדי איזומורפיזם. האם אתם יכולים להוסיף עוד כמה לרשימה?

פתרון. החבורות $\mathbb{Z}_{24}$ ו-$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, הן אבליות, ולכן לא איזומורפיות לחבורות האחרות. הן לא איזומורפיות כי $\mathbb{Z}_{24}$ היא ציקלית ואילו $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ לא ציקלית (הסדר הכי גדול של איבר בחבורה זו הוא 12).

עבור שאר החבורות נמצא שרק בחבורות $\mathbb{Z}_4 \times S_3$, $\mathbb{Z}_3 \times D_4$, $\mathbb{Z}_3 \times Q_8$ ו-D_{12} יש איברים מסדר 12, ולכן הן לא איזומורפיות לאחרות. בחבורה D_{12} יש 4 איברים מסדר 12 והם σ^i עבור $i \in U_{12}$. מספר האיברים מסדר 12 בחבורות שהן מכפלות מגיעות רק מאיבר מן הצורה (x, y) כאשר $12 = [o(x), o(y)]$. כך נוכל לחשב שבחבורה $\mathbb{Z}_3 \times Q_8$ יש 12 איברים מסדר 12, כי יש שישה איברים מסדר 4 ב-Q_8 ושני איברים מסדר 3 ב-$\mathbb{Z}_3$, ואילו בשאר החבורות יש רק 4 איברים מסדר 12. לכן $\mathbb{Z}_3 \times Q_8$ לא איזומורפית לאחרות. כהערת אגב, כפי שמראים ש-D_4 לא איזומורפית ל-Q_8, כך אפשר להראות כי $\mathbb{Z}_3 \times D_4$ ו-$\mathbb{Z}_3 \times Q_8$ הן לא איזומורפיות (זה לא תמיד נכון שאם A ו-B לא איזומורפיות, אז גם $C \times A$ ו-$C \times B$ הן לא איזומורפיות. האם תוכלו למצוא דוגמה למקרה שכזה?).

בחבורה $\mathbb{Z}_3 \times D_4$ שבה יש עשרה איברים מסדר 6 (מספיק להראות שיש יותר משניים), ולכן היא לא איזומורפית לחבורות $\mathbb{Z}_4 \times S_3$ ו-D_{12} שבהן יש רק שני איברים מסדר 6 (הם $(2, (123))$ ו-$(2, (132))$ ב-$\mathbb{Z}_4 \times S_3$ וב-D_{12} הם σ^2 ו-σ^{10}). בחבורה D_{12} יש שני איברים מסדר 4, שהם σ^3 ו-σ^9. לכן החבורה D_{12} לא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4 \times S_3$, שבה יש בה 8 איברים מסדר 4 (שוב, מספיק להראות שיש יותר משניים).

נשאר לנו להוכיח שהחבורות S_4, $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ ו-$SL_2(\mathbb{Z}_3)$ לא איזומורפיות אחת לשניה. בחבורה S_4 ראינו בכיתה שהסדרים האפשריים של האיברים הם רק $1, 2, 3, 4$. בחבורות האחרות יש גם איברים מסדר 6, כמו למשל האיבר $(1, (123)) \in \mathbb{Z}_2 \times A_4$ והאיבר $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}_3)$. בחבורה $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ יש איברים מסדר 4 כמו $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ולכן היא לא איזומורפית לחבורה $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ שבה הסדרים של האיברים הם רק $1, 2, 3, 6$.

בהצלחה!