

טאלגברה מופשטת 2 – תרגיל כיתה 4

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

תרגיל:

תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי שקבוצת האיברים הנילפוטנטיים בו אינה סגורה לחיבור.

פיתרון:

בחוג $R = M_2(\mathbb{R})$ המטריצות $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ הן נילפוטנטיות, אך הסכום שלהן

הוא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה שאינה נילפוטנטית.

משפט האיזומורפיזם הראשון:

יהי $f : R \rightarrow S$ הומומורפיזם אזי $R / \ker f \cong \text{Im } f$.

דוגמאות:

1. עבור העתקת שארית החלוקה $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ נקבל $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.

2. עבור חוג קומוטטיבי. נביט בפונקציה $\varphi_c : R[x] \rightarrow R$ הקיימת

$\varphi_c(f(x)) = f(c)$ לכל $f(x) \in R[x]$. זהו אפימורפיזם [הוכחה: תרגיל בית].

הגרעין הוא כל הפונקציות שהמקדם החופשי שלהן הוא 0, כלומר

$$\ker \varphi_c = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x^k \right\} = \left\{ x \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\} = \langle x \rangle$$

$$R[x] / \langle x \rangle \cong R$$

3. באופן דומה ניתן להראות ש $R[x, y] / \langle y \rangle \cong R[x]$.

תרגיל: יהיו $I \subseteq J$ אידיאלים של R . הוכח כי קיים אפימורפיזם $R/I \rightarrow R/J$.

הוכחה: נגדיר $f: R/I \rightarrow R/J$ לפי $f(r+I) = r+J$. נראה כי הפונקציה

מוגדרת היטב. נניח $r+I = s+I$. אזי $r-s \in I$. מכיוון ש $I \subseteq J$, מתקיים

$$r+J = s+J, \text{ ולכן } r-s \in J$$

נראה כי היא שומרת חיבור (כפל יהיה לבית).

$$f((r+I) + (s+I)) = f((r+s)+I) = (r+s)+J = (r+J) + (s+J)$$

לכל $r+J$ יש מקור והוא $r+I$, ולכן הפונקציה היא על.

הגדרה: $R \neq I \triangleleft R$ הוא אידיאל מקסימלי אם לא קיים $R \neq J \triangleleft R$ כך ש $I \subset J$.

דוגמאות:

1. ב \mathbb{Z}_{45} האידיאלים המקסימליים הם $3\mathbb{Z}_{45}$ ו $5\mathbb{Z}_{45}$.

2. ב \mathbb{Z}_{32} האידיאל המקסימלי היחיד הוא $2\mathbb{Z}_{32}$.

3. בחוג עם חילוק, אין אידיאלים לא טריוויאלים, ולכן אידיאל האפס הוא מקסימלי.

4. לכל ראשוני p , $p\mathbb{Z}$ הוא אידיאל מקסימלי של \mathbb{Z} .

5. עבור R חוג קומוטטיבי, $R[x, y] \triangleleft \langle x \rangle$ איננו מקסימלי, משום שישנו למשל

$$J = \{f(x, y) : f(0, 0) = 0\}$$
 שמכיל אותו ממש.

6. עבור F שדה, בחוג $F[[x]]$ ישנו אידיאל מקסימלי אחד $\langle x \rangle$.

תרגיל: יהי $f: R \rightarrow S$ אפימורפיזם ויהי אידיאל אמיתי $I \triangleleft R$ (Proper ideal) המכיל

את הגרעין אז גם $f(I) \triangleleft S$ הוא אידיאל אמיתי.

הוכחה: [זה שהוא בכלל אידיאל נשאיר כתרגיל בית] נניח בשלילה כי $I \triangleleft R$ אידיאל אמיתי

וכי $f(I) = S$. ניקח איבר $x \in R \setminus I$. מכיוון ש $f(I) = S$, קיים איבר $y \in I$ כך

ש $f(y) = f(x)$. כעת, $x = y + (x - y)$. אולם $x - y \in \ker f \subseteq I$ ולכן $x \in I$

וזו סתירה.

מסקנה-תרגיל: יהי $f : R \rightarrow S$ אפימורפיזם ויהי $I \triangleleft S$. הוכח כי אם I מקסימלי אזי $f^{-1}(I)$ מקסימלי.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים אידיאל ביניים $f^{-1}(I) \triangleleft P \triangleleft R$.

הוא $f(P) \triangleleft R$ ולכן גם P מכיל את הגרעין, ולכן $f^{-1}(I) \supseteq f^{-1}(\{0\}) = \ker f$ אידיאל אמיתי. כמו-כן, $f(P)$ הוא מכיל ממש את I כי $f^{-1}(I)$ כבר כולל את כל האיברים הנשלחים ל- I , ומכיוון ש- P מכיל ממש את $f^{-1}(I)$, הוא חייב להכיל איברים שלא נשלחים ל- I . משמע, יש אידיאל ביניים $I \triangleleft f(P) \triangleleft S$, ולכן I לא מקסימלי.

משפט: יהיה חוג R . $I \triangleleft R$ מקסימלי אם ורק אם R/I חוג פשוט. אם R קומוטטיבי אזי $I \triangleleft R$ מקסימלי אם ורק אם R/I שדה.

דוגמאות:

1. לכל ראשוני p , $p\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ מקסימלי ולכן $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ שדה.
2. אם R שדה אזי $\langle x \rangle \triangleleft R[x]$ מקסימלי בגלל ש $R[x]/\langle x \rangle \cong R$.
3. $\langle x \rangle \triangleleft \mathbb{Z}[x]$ אינו מקסימלי משום ש $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ וזה לא שדה.
4. ע"פ הלמה של צורן, כל אידיאל בחוג עם יחידה מוכל באידיאל מקסימלי, במקרה הזה $\langle x, p \rangle \triangleleft \mathbb{Z}[x]$ הוא אידיאל מקסימלי לכל ראשוני p משום ש $\mathbb{Z}[x]/\langle x, p \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ הוא שדה.

הגדרה: $I \triangleleft R$ ייקרא ראשוני אם לכל שני אידיאלים $A, B \triangleleft R$ כך ש $AB \subseteq I$ אזי $A \subseteq I$ או $B \subseteq I$.

הערה: עבור חוגים קומוטטיביים זה שקול לומר כי לכל $a, b \in R$, אם $ab \in I$ אזי $a \in I$ או $b \in I$.

אולם, בחוגים לא קומוטטיביים התנאי הזה חזק יותר מהראשוניות. למשל, אם D חוג עם

חילוק אזי $M_2(D)$ חוג פשוט ולכן $M_2(D) \triangleleft \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ הוא ראשוני. אבל,

$$\text{מבלי שאף אחת משתי המטריצות משמאל נמצאת} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

באידיאל.

דוגמאות:

1. $p\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ ראשוני כי אם $xy \in p\mathbb{Z}$ אזי $p|x$ או $p|y$.

2. יהי R תחום שלמות [=חוג קומוטטיבי עם יחידה ללא מחלקי אפס] אזי

$\langle x \rangle \triangleleft R[x]$ אידיאל ראשוני. נראה זאת על דרך השלילה. נניח שמתקיים

$fg \in \langle x \rangle$ כך ש $f, g \notin \langle x \rangle$. אזי ל f ו g ישנם איברים חופשיים השונים

מאפס. לכן במכפלה שלהם [בגלל שאין מחלקי אפס] ישנו איבר חופשי השונה מאפס,

וזו סתירה לכך ש $fg \in \langle x \rangle$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. הוכח כי R תחום שלמות אם ורק אם $\{0\}$ הוא

אידיאל ראשוני.

הוכחה: R תחום שלמות אם ורק אם לכל שני איברים $ab = 0$ מתקיים $a = 0$ או

$b = 0$, כלומר לכל $ab \in \{0\}$ מתקיים $a \in \{0\}$ או $b \in \{0\}$, וזה לפי הגדרה קורה אם

ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני.

תרגיל: יהי R חוג קומוטטיבי ו $I \triangleleft R$ אידיאל ראשוני. הוכח כי $R \setminus I$ בגורה לכפל.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימים $a, b \in R \setminus I$ כך ש $ab \notin R \setminus I$. אזי $ab \in I$ ומכיוון

שהוא ראשוני, $a \in I$ או $b \in I$. משמע, $a \notin R \setminus I$ או $b \notin R \setminus I$ וזו סתירה.

תרגיל: יהיה R חוג קומוטטיבי עם יחידה שבו כל האידיאלים הם ראשוניים. צריך להוכיח כי הוא שדה.

הוכחה: נתון ש $\{0\}$ ראשוני ולכן R תחום שלמות. יהי איבר $x \in R, x \neq 0$. נביט באידיאל $\langle x^2 \rangle$. הוא ראשוני מהנתון ולכן $x \in \langle x^2 \rangle$, משמע קיים $a \in R$ כך ש $x = ax^2$. לכן $x(ax - 1) = 0$, ומכיוון ש R תחום שלמות ו $x \neq 0, ax = 1$, משמע x הפיך ולכן R שדה.

תרגיל: יהי הומומורפיזם $f: R \rightarrow S$ של חוגים קומוטטיביים ויהי $I \triangleleft S$ ראשוני. הוכח כי $f^{-1}(I)$ ראשוני.
הוכחה: [פשוטה. נשאיר לבית].

הערה: אם $I, J \triangleleft R$ רשאוניים אזי $I \cap J$ לאו דוקא ראשוני. למשל $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$ ו $J = 3\mathbb{Z}$. במקרה הזה $I \cap J = 6\mathbb{Z}$ שאיננו ראשוני.

משפט:

1. אם R חוג אזי $I \triangleleft R$ רשאוני אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידיאל ראשוני ב R/I .
2. אם R קומוטטיבי אזי $I \triangleleft R$ ראשוני אם ורק אם R תחום שלמות.

דוגמאות:

1. $\langle x \rangle$ אידיאל ראשוני ב $\mathbb{Z}[x]$ משום ש $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ הוא תחום שלמות.
2. $\langle x \rangle$ איננו ראשוני ב $\mathbb{Z}_4[x]$ משום ש $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ איננו תחום שלמות.

טענה: בחוג קומוטטיבי R עם יחידה, כל אידיאל מקסימלי הוא ראשוני.
הוכחה: יהי $I \triangleleft R$ מקסימלי, אזי R/I שדה, ולכן R/I תחום שלמות ולכן I ראשוני.