

אוניברסיטת בר-אילן  
 מבחן בקורס תורת החבורות (סמסטר קיץ)  
 מס': 05+07-88-211  
 מרצה: פרופ' מיכאל מגרל  
 תאריך: 06.09.04 מועד א'  
 חומר עזר: רק מחשבון  
 משך המבחן: שעתיים

## השאלות:

### 5 מתוך 7

1. ענה כן או לא:
  - א. חבורה  $(Q^*, \cdot)$  היא נוצרת סופית.
  - ב. יש אינסוף אוטומורפיזמים של חבורה  $Z$ .
  - ג. קיימת חבורה סופית אבלית  $G$  וזוג אלמנטים שונים  $a, b \in G$  כך ש  $a^5 = b^5$ .
  - ד. מספר האפימורפיזמים  $Z \rightarrow \Omega_4 \times \Omega_5$  גדול ממספר האוטומורפיזמים  $C_{20} \rightarrow C_{20}$ .
  - ה. קיימת חבורה לא אבלית עם 187 אלמנטים.
  - ו. אם הסדר של כל איבר הוא לכל היותר 3 אז החבורה היא אבלית.
  - ז. לכל חבורה סופית  $G$  בת  $n$  אלמנטים קיים מונומורפיזם  $G \rightarrow GL_n(R)$ .
2.
  - א. הוכח שלכל תת חבורה  $H \leq G$  מתקיים:  $|G/H| = |G \setminus H|$ .
  - ב. הוכח שאם  $[G:H] = 2$  אזי  $H \triangleleft G$ . תן דוגמא נגדית אם  $[G:H] = 3$ .
3.
  - א. הוכח משפט Euler.
  - ב. באמצעות משפט Euler פתור  $28^{301} x \equiv 2004 \pmod{99}$ .
4.
  - א. הוכח או הפרך:  $C^*/T \cong R$ ,  $R/5Z \cong T$ , (כאשר  $T := \{z \in C \mid \|z\|=1\}$ ).
  - ב. תאר תמונות אפימורפיות של החבורות  $D_3, \langle \text{cis}\sqrt{3}\pi \rangle$ .
5.
  - א. קבע את הסדר והזוגיות של התמורות:  $\alpha^{205}, \alpha^{-1}\beta\alpha$  ב  $S_{15}$  כאשר  $\alpha = (7,10)(10,2)(9,7,15)(2,7,12)$ ,  $\beta = (9,2,7,10,11)$ .
  - ב. מצא אורך של מסלול הצמדה  $[\beta] = \{g^{-1}\beta g \mid g \in S_{15}\}$  של אלמנט  $\beta = (3,2,6,9)$ .
  - ג. מצא תת חבורה מסדר 40 בחבורה  $S_{15}$ .
6.
  - א. הוכח משפט Burnside על חישוב של מספר מסלולים.
  - ב. לתכשיט בצורת מגן-דוד יש ששה משולשים בקצוות. ניתן לצבוע כל משולש באחד משלושה צבעים נתונים. כמה תכשיטים שונים כאלה אפשר לייצר אם ניתן לסובב את התכשיט ולהופכו?
7.
  - א. הגדר חבורה פתירה ותן דוגמא (רק נימוק מינימלי) של חבורה לא פתירה עם 60 איברים.
  - ב. הוכח שאם  $G$  חבורה בעלת  $p^2q$  איברים (כאשר  $p, q$  ראשוניים) אז  $G$  פתירה.

בהצלחה ושנה טובה !