

אלגברה לינארית 2 88-113
תרגיל 7 – להגשה בכב' באייר (14.5)

.1

מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של המטריצה הממשית הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.2 שלשו / לכסנו את המטריצות הבאות (כפי האפשר):

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.3

יהיו $A, B \in F^{n \times n}$ שתי מטריצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_A(x) = f_B(x)$ אזי $m_A(x) = m_B(x)$

ב. אם $m_A(x) = m_B(x)$ אזי $A \sim B$ (משמע, המטריצות דומות)

ג. אם $m_A(x) = m_B(x)$ אזי $f_A(x) = f_B(x)$

.4

א. יהיו v_1, \dots, v_k וקטורים עצמיים השייכים לאותו ערך עצמי λ של T . הוכח כי תת-המרחב $W = Sp\{v_1, \dots, v_k\}$ הוא T-אינווריאנטי.

ב. הסק מסעיף א' כי כל תת-מרחב של תת-המרחב העצמי V_λ הוא T-אינווריאנטי.

ג. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי כלשהו (לאו דוקא תת-המרחב העצמי של T). האם נכון הוא, כי כל תת-מרחב של W הוא T-אינווריאנטי?

ד. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי ממימד 1. הוכח כי $W = Sp\{v\}$ כאשר v הוא וקטור עצמי של T .

ה. השתמש בסעיף ד', ומצא את כל תתי-המרחבים האינווריאנטיים של הטרנספורמציה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.5

תהי $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ טרנספורמציה ליניארית המוגדרת ע"י:

$$T(x, y, z, u) = \left(\frac{5}{2}x + y - \frac{1}{2}z + u, 3y + u, \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z + u, 3u\right)$$

א. הראה כי:

$$W_1 = Sp\{v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1, 0)\}$$

$$W_2 = Sp\{v_3 = (1, 1, 1, 0), v_4 = (1, 1, 1, 1)\}$$

הם תתי-מרחבים T-אינווריאנטיים.

ב. הוכח כי $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

ג. רשום את מטריצות הטרנספורמציות $[T]_{W_1}$ ו- $[T]_{W_2}$ בבסיסים $B_1 = \{v_1, v_2\}$,

$B_2 = \{v_3, v_4\}$ בהתאמה.

ד. מצא את $[T]_B$.

בהצלחה!