מבנים אלגבריים (89-214)

מרצה: ד"ר מיכאל משה שיין

תשע"ה סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד א'

יש לענות על ארבע שאלות ולסמן באופן ברור בתחילת המחברת באיזה שאלות בחרת. אחרת, ארבע התשובות הראשונות שמופיעות במחברת תיבדקנה. כל שאלה שווה 10 נקודות. אם ארבעה הציונים שלך הם $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$ אזי הציון הסופי יהיה $3(n_1+n_2)+2(n_3+n_4)$.
כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שלוש שעות.
בהצלחה!

1. תהי G חבורה ויהי $a \in G$.

(א) הוכח או הפרך: לכל $n \geq 1$ מתקיים $C_G(a) \subseteq C_G(a^n)$.
(ב) הוכח או הפרך: לכל $n \geq 1$ מתקיים $C_G(a^n) \subseteq C_G(a)$.
(ג) הוכח שאם $\langle a \rangle \trianglelefteq G$ אזי $C_G(a) \trianglelefteq G$.

2. תהי G חבורה אבלית סופית ויהי p מספר ראשוני. הוכח שאם $p \mid |G|$ אזי קיים איבר $g \in G$ כך ש־ $o(g)=p$.

3. תהי G חבורה סופית ויהיו איבריה $g_1, g_2, \ldots, g_n$. יהי $b = g_1 \star g_2 \star \cdots \star g_n$, כאשר הכוכבית מסמנת את פעולת החבורה. יהי e איבר היחידה.

(א) הוכח כי $b^2 = e$.
(ב) הוכח שאם ב־G יש איברים מסדר 2, אזי $o(b)=2$.
(ג) הוכח שאם אין ב־G איברים מסדר 2, אזי $b=e$.

4. יהי F שדה סופי בעל q איברים.

(א) הוכח שקיים איבר $a \in F$ שמקיים את המשוואה

$$a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1_F=0_F$$

אם ורק אם $q \equiv 1 \bmod 7$.

(ב) עבור איזה מספרים טבעיים $n \geq 1$ השדה F בעל 3^n איברים מכיל איבר $a \in F$ שמקיים $a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1_F=0_F$?

5. תהי $f: S_6 \to S_7$ ההעתקה ששולחת את $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \in S_6$ לתמורה $\in S_7$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 7 \end{pmatrix}$. מותר להשתמש בלי הוכחה בעובדה ש־f הומומורפיזם.

(א) הוכח שהתמונה $f(S_6)$ אינה תת־חבורה נורמלית של S_7.
(ב) כמה קוסטים שונים של $f(S_6)$ יש ב־S_7 ? מצא נציג של כל קוסט.