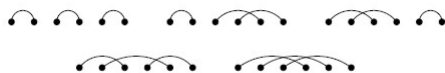


## תרגיל בית 4 במתמטיקה בדידה 2

### 83-118 סמסטר ב' תשע"ח

24 באפריל 2018

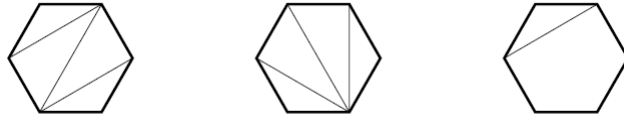
1. כמה סדרות של  $n$  מספרים שלמים  $(a_1, \dots, a_n)$  יש המקיימים:  $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ , ובנוסף  $a_i \leq i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ?
2. כמה סדרות של  $n$  אחדות (1) ו- $n$  מינוס אחדות (-1) יש, כך שכל הסכומים החלקיים הינם אי-שליליים?
3. א. כמה אפשרויות יש להכניס את האיברים  $\{1, \dots, n\}$  בסדר עולה לתור ולהוציאם ממנו (כלומר, מי שנכנס ראשון יוצא ראשון, וניתן להוציא לפני שכולם נכנסו)?  
 ב. כמה אפשרויות יש להכניס את האיברים  $\{1, \dots, n\}$  בסדר עולה למחסנית ולהוציאם ממנה (כלומר, מי שנכנס ראשון יוצא אחרון, וניתן להוציא לפני שכולם נכנסו)?
4. נתבונן ב- $2n$  נקודות על ישר. אנו רוצים לחבר זוגות ע"י קשת מעל הנקודות באופן שאין אף קשת ממש מעל קשת אחרת. כמה אפשרויות יש לעשות זאת? דוגמא עבור  $n = 3$ :



איור 1:

5. יהי מצולע  $P$  בן  $n + 2$  צלעות. אלכסון של מצולע  $P$  הוא קו המחבר שני קודקודים של  $P$  ונמצא בחלקו הפנימי. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של  $P$ . שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמא:

כאשר במוששה מצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, ומצד שמאל ובאמצע 2 שילוישים שונים.



איור 2:

א. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן  $n + 2 \geq 3$  צלעות ניתן לשילוש ושיש בשילוש  $n - 1$  אלכסונים. מותר להניח שכל אלכסון במצולע נמצא בחלקו הפנימי של המצולע (זה נקרא מצולע קמור). (ניתן להוכיח גם שכל מצולע ניתן לשילוש).  
 ב. כמה שילושים אפשריים יש למצולע משוכלל בן  $n + 2$  צלעות? הדרכה: נסמן את הקודקודים ב  $v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$ . הקשת  $v_0, v_{n+1}$  נמצאת באיזשהו משולש בשילוש המצולע, ובחירת הקודקוד מחלקת לשני תתי מצולעים. היעזרו בנוסחת הנסיגה שראינו בתרגול. (עבור  $n = 0$  הניחו שיש 'שילוש' אחד).