

כל הזכויות שמורות  
 זהבית צבי ©  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר

### פתרון תרגיל בית 5, גיאומטריה אנליטית, זהבית צבי

סווגו את התבניות הריבועיות הבאות ומצאו להן צורה קנונית:

$$1. \quad 2x^2 + y^2 + 3y = 0$$

$$2. \quad 4x^2 + y^2 + 6x - 12y + \frac{113}{4} = 0$$

$$3. \quad 4x^2 + 4y^2 + 6x - 12y + 10 = 0$$

$$4. \quad 6x^2 + 12y - 10 = 0$$

$$5. \quad 4x^2 + y^2 - 40x + 6y + 93 = 0$$

### פתרון

1. המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{והתבנית הנתונה נכתבת כך: } (*): \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (0 \quad 3) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = 0$$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע"ע הם:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  ולפי מה שלמדנו  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  ו-  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , לכן זו

אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת  $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , מתקיים:

$$P^T A P = I^T A I = I A I = A = D$$

החלפת המשתנים כאן היא:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{P}_{I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow (x \quad y) = (x' \quad y')$  מכיוון ש-  $P = I$ , נציב בתבנית

ונקבל:

$$(x' \quad y') \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (0 \quad 3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2x'^2 + y'^2 + 3y' = 0$$

נבצע השלמה לריבוע לפי נוסחת הכפל המקוצר  $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ :

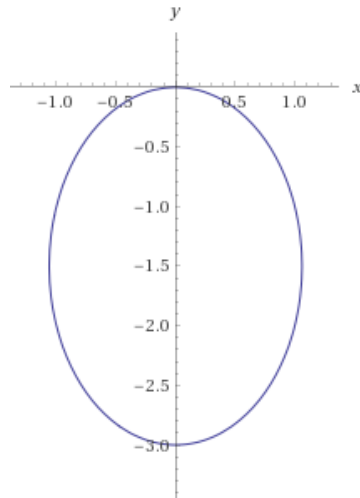
כל הזכויות שמורות  
 © זהבית צבי  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר

$$2x^2 + y^2 + 3y' = 0 (:2) \Rightarrow x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}y'^2}_{u=\frac{1}{\sqrt{2}}y'} + \underbrace{\frac{3}{2}y'}_{2u \quad v=\frac{3}{2}y'} + \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}_{v^2} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}\left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8} (:8) \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{8}} + \frac{1}{2} \frac{\left(y' + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{8}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y' + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

כאשר  $a = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}, b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \Leftarrow a^2 = \frac{9}{8}, b^2 = \frac{9}{4}$  זו אליפסה מוזנת שמרכזה בנקודה  $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ .  
איור:



כיוון ש-  $P = I$ , הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה  $\theta = 0$  ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי  $A$  אלכסונית והצירים של  $x$  ו-  $y$  הם זהים לאלה של  $x'$  ו-  $y'$ .

2. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

והתבנית הנתונה נכתבת כך:  $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -12 \end{pmatrix}}_x \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + \frac{113}{4} = 0 (*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע"ע הם:  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$  ולפי מה שלמדנו  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  ו-  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , לכן זו

כל הזכויות שמורות  
 © זהבית צבי  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר

אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת  $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , מתקיים:

$$P'AP = I'AI = IAI = A = D$$

החלפת המשתנים כאן היא:  $(x \ y) = (x' \ y')$ . מכיוון ש- $P = I$ , נציב בתבנית ונקבל:

$$(x' \ y') \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (6 \ -12) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{113}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$4x'^2 + y'^2 + 6x' - 12y' + \frac{113}{4} = 0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2, (u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$\frac{4x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} + \frac{6x'}{2} - \frac{12y'}{2} + \frac{113}{4} = 0 \Rightarrow \underbrace{\left\{ \left( \frac{2x'}{u} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2x'}{u} \cdot \frac{3}{v} + \left( \frac{3}{v} \right)^2 \right\}}_{(u+v)^2} + \underbrace{\left\{ \left( \frac{y'}{u} \right)^2 - 2 \cdot \frac{y'}{u} \cdot \frac{6}{v} + \frac{6^2}{v^2} \right\}}_{(u-v)^2} + \frac{113}{4} - \left( \frac{3}{2} \right)^2 - 6^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left( 2x' + \frac{3}{2} \right)^2 + (y' - 6)^2 = -\frac{113}{4} + \frac{9}{4} + 36 = 10 \Rightarrow \left[ 2 \left( x' + \frac{3}{4} \right) \right]^2 + (y' - 6)^2 = 10$$

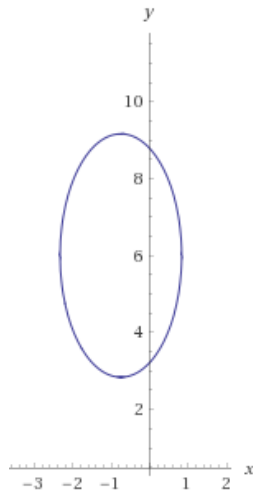
$$\Rightarrow 4 \left( x' + \frac{3}{4} \right)^2 + (y' - 6)^2 = 10 \quad (:10) \Rightarrow \frac{\left( x' + \frac{3}{4} \right)^2}{\frac{10}{4}} + \frac{(y' - 6)^2}{\frac{10}{b^2}} = 1$$

כאשר  $a = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,  $b = \sqrt{10} \Leftrightarrow a^2 = \frac{10}{4}$ ,  $b^2 = 10$

זו אליפסה מווזת שמרכזה בנקודה  $\left( -\frac{3}{4}, 6 \right)$ .

איור:

כל הזכויות שמורות  
 זהבית צבי ©  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר



הצירים באיור הם  $x', y'$ .

כיוון ש-  $P = I$ , הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה  $\theta = 0$  ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי  $A$  אלכסונית והצירים של  $x$  ו-  $y$  הם זהים לאלה של  $x'$  ו-  $y'$ .

3. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + \begin{pmatrix} 6 & -12 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + 10 = 0 \quad (*)$$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. אנו רואים כי  $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ , לכן  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  ו-  $\lambda_1 = \lambda_2$  ולכן אנו יודעים שצריך לקבל מעגל. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת  $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , מתקיים:

$$P'AP = I'AI = IAI = A = D$$

החלפת המשתנים כאן היא:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{P}{I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow (x \ y) = (x' \ y')$

ונקבל:

כל הזכויות שמורות  
 © זהבית צבי  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר

$$(x' \ y') \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A=D} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (6 \ -12) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$4x'^2 + 4y'^2 + 6x' - 12y' + 10 = 0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

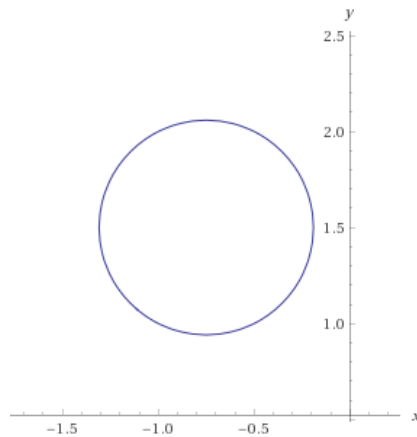
$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2, (u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$\underline{4x'^2} + \underline{4y'^2} + \underline{6x'} - \underline{12y'} + 10 = 0 \Rightarrow \underbrace{\left\{ \left( \frac{2x'}{u} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2x'}{u} \cdot \frac{3}{v} + \left( \frac{3}{v} \right)^2 \right\}}_{(u-v)^2} + \underbrace{\left\{ \left( \frac{2y'}{u} \right)^2 - 2 \cdot \frac{2y'}{u} \cdot \frac{3}{v} + \frac{3^2}{v^2} \right\}}_{(u-v)^2} + 10 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 - 3^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left( 2x' + \frac{3}{2} \right)^2 + (2y' - 3)^2 = -10 + \frac{9}{4} + 9 = \frac{5}{4} \Rightarrow \left[ 2 \left( x' + \frac{3}{4} \right) \right]^2 + \left[ 2 \left( y' - \frac{3}{2} \right) \right]^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4 \left( x' + \frac{3}{4} \right)^2 + 4 \left( y' - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{5}{4} (:4) \Rightarrow \left( x' + \frac{3}{4} \right)^2 + \left( y' - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{5}{16}$$

קיבלנו מעגל מוזז שמרכזו בנקודה  $\left( -\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right)$  ברדיוס  $R = \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftarrow R^2 = \frac{5}{16}$



כיוון ש-  $P = I$ , הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה  $\theta = 0$  ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי A אלכסונית והצירים של x ו-y הם זהים לאלה של x' ו-y'.

כל הזכויות שמורות  
 זהבית צבי ©  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר

4. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא:  $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

והתבנית הנתונה נכתבת כך: (\*)  $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (0 \ 12) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 10 = 0$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע"ע הם:  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 0$  ולפי מה שלמדנו  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$  ו-  $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$ , לכן זו

פרבולה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת  $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , מתקיים:

$$P'AP = I'AI = IAI = A = D$$

החלפת המשתנים כאן היא:  $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  מכיוון ש-  $P = I$ , נציב בתבנית

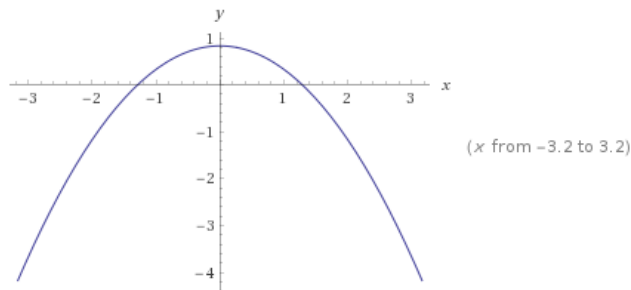
ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A=D} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (0 \ 12) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$6x'^2 + 12y' - 10 = 0 \Rightarrow y' = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}x'^2$$

קיבלנו פרבולה מוזזת.

איור:



כיוון ש-  $P = I$ , הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה  $\theta = 0$  ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי  $A$  אלכסונית והצירים של  $x$  ו-  $y$  הם זהים לאלה של  $x'$  ו-  $y'$ .

5. המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל הזכויות שמורות  
 זהבית צבי ©  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + (-40 \quad 6) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x + 93 = 0 \quad (*)$$

המתריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע"ע הם:  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$  ולפי מה שלמדנו  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  ו-  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , לכן זו

אליפסה. המתריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המתריצה המלכסנת  $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , מתקיים:

$$P^T A P = I^T A I = |A| = A = D$$

החלפת המשתנים כאן היא:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{P}_{I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow (x \quad y) = (x' \quad y')$  מכיוון ש-  $P = I$ , נציב בתבנית

ונקבל:

$$(x' \quad y') \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-40 \quad 6) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 93 = 0 \Rightarrow$$

$$4x'^2 + y'^2 - 40x' + 6y' + 93 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע לפי נוסחת הכפל המקוצר  $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ :

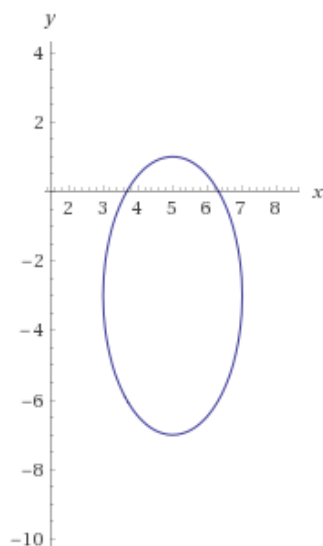
$$4x'^2 + y'^2 - 40x' + 6y' + 93 = 0 \Rightarrow \left\{ \left( \frac{2x'}{u} \right)^2 - 2 \cdot \frac{2x'}{u} \cdot \frac{10}{v} + \frac{10^2}{v^2} \right\} + \left\{ \frac{y'^2}{u^2} + 2 \cdot \frac{y'}{u} \cdot \frac{3}{v} + \frac{3^2}{v^2} \right\} + 93 - 100 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(2x' - 10)^2 + (y' + 3)^2 = 16 \Rightarrow (2(x' - 5))^2 + (y' + 3)^2 = 16 \Rightarrow 4(x' - 5)^2 + (y' + 3)^2 = 16 \quad (:16)$$

$$\Rightarrow \frac{(x' - 5)^2}{4} + \frac{(y' + 3)^2}{16} = 1$$

כאשר  $a = 2, b = 4 \Leftarrow a^2 = 4, b^2 = 16$ .  
 קיבלנו אליפסה מוזזת שמרכזה בנקודה  $(5, -3)$ .

כל הזכויות שמורות  
 זהבית צבי ©  
 אין להעתיק/ להעלות לאתר אחר



כיוון ש-  $P = I$ , הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה  $\theta = 0$  ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי  $A$  אלכסונית והצירים של  $x$  ו-  $y$  הם זהים לאלה של  $x'$  ו-  $y'$ .