טורים אינסופיים של מספרים מרוכבים

הגדרה: אומרים שסדרה אינסופית של מספרים מרוכבים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול l אם מתקיים $\lim_{n\to\infty}|z_n-l| = 0$

הגדרה: אומרים שהטור האינסופי של מספרים מרוכבים $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס לגבול l אם סדרת הסכומים החלקיים $\omega_k=\sum_{n=1}^{k} z_n$ מתכנסת לגבול l.

הגדרה: אומרים שהטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ מתכנס.

משפט: אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס

משפט: תנאי הכרחי להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ הוא ש- $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 0$

שאלה: חשבו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

פתרון: נבדיל בין 3 מקרים

א. אם $|z|<1$ אז נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}|z^n| = \sum_{n=1}^{\infty}|z|^n < \infty$$

כי זה טור הנדסי עם מנה $q<1$ מתכנס.

(2) לכן הטור מתכנס בהחלט ומכאן מתכנס.

ב. אם $|z|>1$ אז $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^n}{n}=\infty$

ולכן לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות הטור.

ג. $|z|=1$: אם $z=1$ אז נקבל טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ מתבדר. אחרת $z=e^{i\theta}$ כש $0<\theta<2\pi$

ולכן $z^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$, ולכן נקבל ש:

$$(*)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$$

הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta)$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta)$ חסומים

עבור $0\neq\theta$ (כי למשל $|\cos\theta+\dots+\cos(n\theta)|$

$$=\left|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2|\sin(\frac{\theta}{2})|}+\frac{1}{2}<\infty)$$

ולכן הטור המקורי (*) מתכנס לפי משפט דיריכלה

(משפט אבל: אם $\sum a_n$ טור חסום ו-b_n סדרה מונוטונית ששואפת לאפס אז הטור $\sum a_n b_n$ הוא טור מתכנס.)

3) שאלה: מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz^2}$.

פתרון: נסמן $z=x+iy$, אז

$e^{nz^2}=e^{n(x^2-y^2)+2inxy}$ ולכן

$|e^{nz^2}|=e^{n(x^2-y^2)}$, ואם $x^2-y^2\geq 0$ אז

הסדרה $\{e^{n(x^2-y^2)}\}_{n=1}^{\infty}$ אינה שואפת לאפס

ולכן הטור מתבדר. ואם $x^2-y^2<0$ אז

$0<e^{x^2-y^2}<1$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(x^2-y^2)}$

הוא טור גיאומטרי ולכן מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות הוא $x^2-y^2<0$

או $|y|>|x|$

<u>משפט טיילור</u>: אם f אנליטית בעיגול

$D=\{z \mid |z-\alpha|<r\}$ אז לכל $z\in D$

מתקיים $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ (*) ו-

$$a_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,dw$$

כאשר C הוא מעגל כלשהו עם מרכז ב-α המוכל ב-D.

הטור (*) נקרא טור טיילור של f סביב a.

- טורי טיילור של פונקציות מוכרות סביב $z=0$:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1$$

<u>משפט</u>: רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ נתון ע"י $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}}$ ובמקרה שקיים הגבול $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ אזי $R=l$.

<u>תרגיל</u>: פתחו לטור טיילור את הפונקציות הבאות בסביבות הנקודות:

א. $f(z)=e^{z+1}$ סביב $z=3$.

ב. $f(z)=\sin z$, $f(z)=\sin^2 z$ סביב $z=\frac{\pi}{4}$.

ד. $f(z)=\frac{1}{z^2-4}$ סביב $z=1$. (5)

~~סביב~~ 10

$$f(z)=e^{z+1}=e^4e^{z-3}$$
$$=e^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n!}$$

$$f(z)=\sin z=\sin\left(z-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z)=\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2z)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2z-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2z-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+2}\right) \quad ד.$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{1-(z-1)}-\frac{1}{(z-1)+3}\right)$$

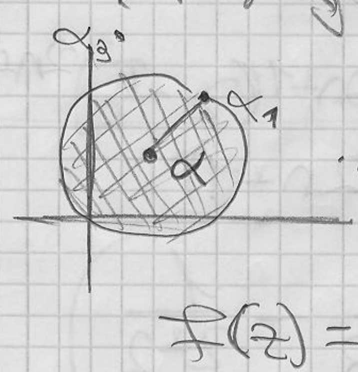
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{1-(z-1)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

הטור הראשון מתכנס כאשר $|z-1|<1$ והטור השני מתכנס כאשר $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ או $|z-1|<3$

לכן רדיוס ההתכנסות של הטור שווה ל-1.

<u>משפט</u>: תהי f פונקציה אנליטית בתחום $R=\mathbb{C}\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$ ונניח כי לכל n f איננה חסומה בסביבה נקובה של α_n. אז לכל $\alpha\in R$ רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של f סביב α שווה למרחק בין α לנקודה α_n הקרובה ביותר ל-α.



<u>דוגמא</u>: נמצא את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור α_2 של הפונקציה

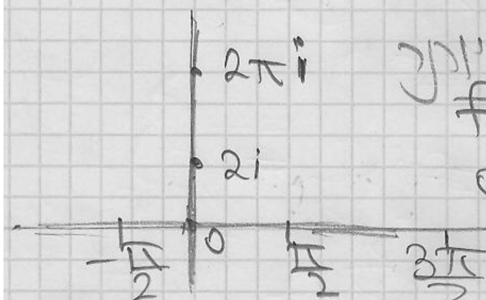
$$f(z) = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{e^{-z}-1}$$

סביב $z=2i$

פתרון: נמצא את הנקודה הקרובה ביותר ל-$z=2i$
שבה f אינה חסומה. f אינה חסומה
בנקודות z_0 שבהן $\cos z_0 = 0$ או

$e^{-z_0}-1=0$: $\cos z_0 = 0$ $\quad z_0=\frac{\pi}{2}+\pi K$

$e^{-z_0}-1=0$, $z_0 = 2\pi K$



הנקודה הקרובה ביותר ל $z=2i$
שבה f $z_0=0$ הנקודה
אינה חסומה ולכן רדיוס
ההתכנסות של טור טיילור
של f סביב $z=2i$ היא
$R=2$.

שאלה: מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור
טיילור של $f(z)=\frac{\sin(\pi z^2)}{\sin(\pi z)}$ סביב $z=0$.

פתרון: נמצא את הנקודה הכי קרובה
ל-$z=0$ שבה f אינה חסומה. הפונקציה
$\sin(\pi z)$ מתאפסת כאשר $z=K$. נבדוק
האם f חסומה בנקודות אלו:

$$\lim_{z\to K}\frac{\sin(\pi z^2)}{\sin(\pi z)} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{z\to K}\frac{2\pi z\cos(\pi z^2)}{\pi\cos(\pi z)}$$

$$=2k\frac{(-1)^{k^2}}{(-1)^k}=2K<\infty$$

לכן f חסומה בכל נקודה $z_k=k$ ולכן
רדיוס ההתכנסות יהיה $R=\infty$.