תרגול 3 - אינפי 4

20 במרץ 2016

תקציר

שדות וקטוריים ותבניות דיפרנציאליות לינאריות. תבניות סגורות ומדוייקות. שדות משמרים. אינטגרל קווי מסוג שני.

1 שדות וקטוריים ותבניות דיפרנציאליות לינאריות

הגדרה 1. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$. פונקציה מ $F:U\to\mathbb{R}^n$ נקראת שדה וקטורי.

דוגמה 1. תהי Γ עקומה חלקה עם פרמטריזציה γ. לכל $x=\gamma(t)$, הקטור $\gamma'(t)$ המשיק ל Γ ב x הוא שדה וקטורי.

דוגמה 2. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$, ו $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. אזי $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(a)$ הוא שדה וקטורי. ∇f נקרא גרדיאנט.

דוגמה 3. יהי $M=\left\{(x,y,z):z=ax^2+by^2+c\right\}$, $a,b>0$ פרבולואיד. לכל נק' של M $p\in M$, וקטור הנורמל $n(p)$ למישור משיק ל M ב p כך שרכיב z שלילי הוא שדה וקטורי.

הגדרה 2. אוסף כל הפונקציות הלינאריות מ $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}$ מסומן ב $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

דוגמה 4. כל פונקציה לינארית $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא מהצורה $\phi(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.

נזכר שהמרחב $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ נפרש על ידי הפונקציות $\{f_i\}_{i=1}^n$ כאשר f_i פועל על הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$.f_i(e_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

באנליזה וקטורית (נושא של הקורס שלנו) מקובל לסמן את הפונקציה הלינארית f_i על ידי $\mathbf{d}x_i$.

הגדרה 3. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. תבנית דיפרניאלית לינארית היא פונקציה $\phi:U\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. לעיותים נסמן $\phi(x)$ או ϕ_x. כלמר, לכל נק' אנו מתאימים פונקציה לינארית מ $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}$.

כל תבנית לינארית ניתן לבטא באופן הבא:

$$\phi(x)=\phi_1(x)\,\mathbf{d}x_1+\cdots+\phi_n(x)\,\mathbf{d}x_n$$

הגדרה 4. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$. תבנית $\phi:U\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\phi(x)=\phi_1(x)\,\mathbf{d}x+\cdots+\phi_n(x)\,\mathbf{d}x_n$ נקראת רציפה אם לכל i, $\phi_i(x)$ רציפה. באופן דומה, תבנית נקראת דיפרנציאבילית, אם לכל i, $\phi_i(x)$ דפרנציאבילית. באופן יותר כללי נאמר שתבנית $\phi\in C^n(U)$ אם כל נזזרת חלקית מסדר n רציפה.

נזכר מאלגברה לינארית שלכל פונקציונל $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קיים וקטור יחיד w_ϕ כך שלכל $\phi\in\mathbb{R}^n$, מתקיים $\phi(v)=\langle v,w_\phi\rangle$. זאת אומרת שלכל תבנית דיפרנציאלית מתאים שדה וקטורי. בעצם, קיימת התאמה חח"ע ועל בין תבניות דיפרנציאליות לינאריות לבין שדות וקטוריים.

דוגמה 5. תהי f פונקציה דיפנציאבילית. אזי הדיפרנצאיל של f בנקודה a, df_a מתאים לוקטור הגרדיאנט באופן הבא: $\mathbf{d}f_a(w)=\langle w,\nabla f(a)\rangle$

דוגמה 6. יהי F שדה וקטורי. הפונקציה $\phi_F(x)=\langle v,F(x)\rangle$הוא תבנית דיפרנציאלית.

הגדרה 5. יהי $F(x)=(F_1(x),\dots F_n(x))$ שדה וקטורי. נגדיר $\mathbf{div}F$ להיות התבנית הבאה

$$\mathbf{div}F(x)=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x)+\cdots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x).$$

הערה 1. לעיתים משתמשים בסימון $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),(F_1(x),\dots F_n(x))\right\rangle=\langle\nabla,F\rangle$.

תרגיל 1. חשב את הדיברגנטים של השדות הקוטוריים הבאים:

1. $F=(x,y,z)$
2. $G=\left(xyz,e^xy^2z,1\right)$

פתרון:

1.
$$\mathbf{div}F=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),(x,y,z)\right\rangle=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3$$

2.
$$\mathbf{div}G=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),\left(xyz,e^xy^2z,1\right)\right\rangle=\frac{\partial(xyz)}{\partial x}+\frac{\partial\left(e^xy^2z\right)}{\partial y}+0=yz+2e^xyz$$

2 תבניות סגורות ומדוייקות

הגדרה 6. תבנית לינארית $f=f_1dx_1+\cdots+f_ndx_n$ נקראת סגרוה אם לכל i ו j מתקיים $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

הגדרה 7. תבנית לינארית ϕ נקראת מדוייקת אם קיימת פונקציה דיפרנציאבילית Φ כך ש $\phi=\mathbf{d}\Phi$. (כאשר $\mathbf{d}\Phi$מסמן את הדיפרנצאיל של Φ).

כמו שהזכרנו קודם, קיימת התאמה בין תבניות לינאריות לשדות וקטוריים, נביא את ההגדרות המקבילות לשדות.

הגדרה 8. שדה וקטורי $F:U\to\mathbb{R}^n$ נקרא משמר אם קיימת פונ' דיפרנציאבילית Φ כך ש $\nabla\Phi=F$. במקרה הזה, פונקצייה Φ נקראת פונקציית פוטנציאל.

משפט 1. יהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$. אזי כל תבנית מדוייקת $\phi\in C^1(U)$ היא סגורה.

הכיוון השני לא בהכרח נכון. נתבונן בפונקציה אך המשפט הבא נותן תנאי מספיק שבו זה נכון.

הגדרה 9. נארם ש $U \subseteq \mathbb{R}^n$ הוא תחום כוכבי, אם קיימת נקודה $p \in U$ כך שלכל $x \in U$ הקטע שמחבר בין p ו x מוכל כולו ב U.

משפט 2. *(למת פואנקרה).* יהי $U \subseteq R$ תחום כוכבי. אזי כל תבנית סגורה $f : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ היא מדוייקת.

תרגיל 2. עבור כל אחת מהבתניות הבאות, קבע האם היא מדוייקת. במידה וכן מצא את פונקציית הפוטנציאל של השדה שמתאים לה.

1. $\omega = \left(3x^2y^2 + 8xy^3\right) \mathbf{d}x + \left(2x^3y + 12x^2y^2 + 4y\right) \mathbf{d}y$
2. $\omega = \left(y^2 + 2xz\right) \mathbf{dx} + \left(2xy + 3y^2z^3\right) \mathbf{dy} + \left(2x^2z + 3y^3z^2\right) \mathbf{dz}$

פתרון:

(א) מכיוון ששתי הפונ' התבנית מוגדת בכל $\mathbb{R}^2$, לפי למת פואנקרה מספיק לבדוק שהיא סגורה. נבדוק האם מתקיים השוויון

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(3x^2y^2 + 8xy^3\right)}{\partial y} &= \frac{\partial\left(2x^3y + 12x^2y^2 + 4y\right)}{\partial x} \\
\frac{\partial\left(3x^2y^2 + 8xy^3\right)}{\partial y} &= 6x^2y + 24xy^2 \\
\frac{\partial\left(2x^3y + 12x^2y^2 + 4y\right)}{\partial x} &= 6x^2y + 24xy^2
\end{aligned}$$

ולכן התבנית מדוייקת. נמצא את פונקציית הפוטנציאל. במידה וקיימת חייב להתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^2 + 8xy^3 \\
&\Downarrow \\
f &= \int 3x^2y^2 + 8xy^3 \mathbf{dx} \\
&\Downarrow \\
\int 3x^2y^2 + 8xy^3 &= x^3y^2 + 4x^2y^3 + C\left(y\right)
\end{aligned}$$

$C\left(y\right)$ היא פונקצייה שתלוייה ב y בלבד ומתאפסת כאשר אנחנו גוזרים לפי x. כמו כן, חייב להתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 12x^2y^2 + C'\left(y\right) &= 2x^3y + 12x^2y^2 + 4y \\
&\Downarrow \\
C'\left(y\right) &= 4y \\
&\Downarrow \\
C\left(y\right) &= 2y^2 + C \\
&\Downarrow \\
f &= 2x^3y + 12x^2y^2 + 2y^2 + C
\end{aligned}$$

נראה שקיימות תבניות סגורות שאינן מדוייקות.

3 אינטגרל קווי מסוג שני

ניתן קודם קצת מוטיבציה. נניח שאנחנו מפעילים כוח קבוע F(לכוח יש כיוון וגודל, לכן אפשר לחשוב עליו כוקטור) על גוף שנע על קו ישר קבוע מהנקודה X_1 לנקודה X_2. נסמן $\Delta X = X_2 - X_1$. אזי העבודה שמבצע הכוח F מוגדר על ידי $W = \langle F, \Delta X\rangle$. יש חשיבות לכיוון של הכוח - למשל אנחנו מעוניינים להזיז ספר שמונח על השולח, ועל מנת לעשות זאת אנחנו דוחפים בשיא הכוח למעלה(במקום ימינה). במקרה הנ"ל הספר לא יזוז ימינה למרות שהפעלנו כוח גדול. העבודה שבצענו היא תהיה 0. אם המסלול שבו נע הגוף הוא לא ישר והכוח שפועל על הגוף אינו קבוע (אבל רציף) ננסה לקרב את העבודה שהכוח מבצע בעזרת קטעים קצרים וכוח קבוע. זו היא מוטיבציה להגדרה הבאה.

הערה 2. לעיתים נסמן $f \cdot g$ במקום $\langle f, g\rangle$.

הגדרה 10. תהי Γ מסילה עם פרמטריזציה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי. לכל חלוקה $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ וסדרה של נקודות $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ נסמן על ידי $\Delta\gamma_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ ונגדיר את הסכום

$$S_\gamma(\mathcal{P}, x, F) = \sum_{k=0}^{n} F(x_i) \cdot \Delta\gamma_i.$$

אם קיים מספר I כך שלכל סדרה של חלוקות $\mathcal{P}^{(k)}$ובחירת נקודות $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n_k}$ מתקיים

$$\lim_{k\to\infty} S\left(\mathcal{P}^{(k)}, x^{(k)}, F\right) = I$$

הוא נקרא אינגרל קווי מסוג שני ומסמנים $I = \int_\Gamma F \cdot \mathbf{d}\gamma$ או $I = \int_\gamma F_1(x)\,\mathbf{d}x_1 + \ldots F_n(x)\,\mathbf{d}x_n$. (כאשר $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$).

הערה 3. האינטגרל תלוי בכיוון שבו אנחנו הולכים על המסילה, כלמר באורייטנציה. אם ניקח את אותה המסילה ונילך בכיוון ההפוך נקבל אותו אינטגרל עם סימן הנגדי. זה נובע מההגדרה של האינטגרל.

הערה 4. נשים לב שאם נסמן $\phi = F_1\mathbf{d}x_1 + \cdots + F_n\mathbf{d}x_n$ בעצם בצד אחד מדובר בתבנית ובצד שני פונ' וקטורית. על האינטגרל אפשר לחשוב בעצם בשתי צורות. או שאנחמו מציבים את $\Delta\gamma_i$בתבנית הדיפרנציאלית בנקודה $\gamma(x_i)$ או שאנחנו מכפילים את F בקודה $\gamma(x_i)$ בוקטור $\Delta\gamma_i$.

משפט 3. תהי Γ מסילה חלקה עם פרמטריזציה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. אזי

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot \mathbf{d}\gamma &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathbf{d}t \\ &= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\right)\mathbf{d}t.\end{aligned}$$

הערה 5. אם α ו β הן עקומות שקולות, אזי

$$\int_\alpha F = \int_\beta F.$$

תרגיל 3. תהא $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)$$

ושדה המוגדר על ידי

$$F(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

חשב את $\int_\gamma F$.

פתרון: מתקיים

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, \cos t - \sin t)$$

כלמר, העקומה חלקה ולכן מקבלים

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_0^{2\pi} \langle(\cos t, \cos t + \sin t, 2\cos t + 2\sin t), (-\sin t, \cos t, \cos t - \sin t)\rangle \, \mathbf{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos t \sin t - \cos t \sin t - \sin^2 t + \cos t \sin t + 2\cos^2 t - 2\sin^2 t\right) \mathbf{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2\cos^2 t - 3\sin^2 t\right) dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \cos 2t \mathbf{d}t - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathbf{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathbf{dt} \\
&\Downarrow \\
\sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right) \\
&\Downarrow \\
\sin^2 t &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \\
&\Downarrow \\
-\int_0^{2\pi} \sin^2 t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2t - 1)\, dt \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

המשפט נשאר נכון, גם אם מחליפים מסילה חלקה במסילה חלקה למקוטעין.

תרגיל 4. חשב את האינטגרל הקווי

$$\int_\Gamma -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

כאשר Γ הוא השפה של המלבן בעל הקודקודים $A = (2,2)$, $B = (-1,2)$, $C = (-1,-3)$, $D = (2,-3)$ עם הכיוון $ABCDA$.

פתרון: נסמן

$$\phi(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

מתקיים:

$$\int_\Gamma \phi = \int_{AB} \phi + \int_{BC} \phi + \int_{CD} \phi + \int_{DA} \phi$$

לפי האדיטיביות של האינגרל. נחשב כל אחד מהאם. נשים לב ש

$$\int_{AB} \phi = -\int_{BA} \phi$$

נבחר את הפרמטריזציה הבאה ל BA.

$$\begin{aligned}
\gamma : [-1,3] &\to \mathbb{R}^2 \\
\gamma(t) &= (t,2)
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\int_{BA}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int_{-1}^{2}-\frac{2\mathbf{d}t}{t^2+4} \\
&= -2\int_{-1}^{2}\frac{\mathbf{d}t}{t^2+4} \\
&= -2\int_{-1}^{2}\frac{1}{4}\frac{\mathbf{d}t}{\frac{t^2}{4}+1} \\
&= -2\int_{-1}^{2}\frac{1}{4}\frac{\mathbf{dt}}{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2+1} \\
&= \arctan\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= -\left(\arctan\left(\frac{2}{2}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{2}\right)\right) \\
&= -\left(\arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&\Downarrow \\
\int_{AB}\phi &= \arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

נעבור לחשב את $\int_{BC}\phi$. שוב, כמו קודם, מתקיים

$$\int_{BC}\phi=\int_{CB}\phi$$

נבחר את הפרמטריציזיה הבאה ל-CB. $\gamma:[-3,2]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\gamma(t)=(-1,t)$. נקבל:

$$\begin{aligned}
\int_{CB}\phi &= \int_{-3}^{2}\phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathbf{d}t \\
&= \int_{-3}^{2}\left\langle\left(\frac{-t}{1+t^2},-\frac{1}{1+t^2}\right),(0,1)\right\rangle\mathbf{d}t \\
&= -\int_{-3}^{2}\frac{\mathbf{d}t}{1+t^2} \\
&= -\arctan(t)\Bigg|_{-3}^{2}=-(\arctan 2+\arctan 3) \\
&\Downarrow \\
\int_{BC}\phi &= \arctan 2+\arctan 3
\end{aligned}$$

נחשב את $\int_{CD}\phi$. נבחר פרמטריזציה $\gamma(t)=(t,-3)$ כאשר $t\in[-1,2]$. נקבל

$$\begin{aligned}\int_{CD}\phi &= \int_{-1}^{2}\phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathbf{d}t\\ &= \int_{-1}^{2}\frac{3\mathbf{d}t}{t^2+9}\\ &= \int_{-1}^{2}\frac{1}{3}\frac{\mathbf{d}t}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}\\ &= \arctan\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}\\ &= \arctan\left(\frac{2}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

באופן דומה: נבחר פרמטריזציה ל DA. $\gamma(t)=(2,t)$ עבור $t\in[-3,2]$. האינטגרל הופך ל

$$\begin{aligned}\int_{DA}\phi &= \int_{-3}^{2}\phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathbf{d}t\\ &= \int_{-3}^{2}\frac{\mathbf{d}t}{4+t^2}\\ &= 2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{-3}^{2}=\arctan 1+\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

נחבר את האינטגרלים ונקבל:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}\phi &= \int_{AB}\phi+\int_{BC}\phi+\int_{CD}\phi+\int_{DA}\phi\\ &= \arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan 2+\arctan 3\\ &+ \left(\frac{2}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan 1+\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

נשתמש בזהות טריגונומטרית $\arctan(\alpha)+\arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{2}$ ונקבל

$$.\int_{\Gamma}\phi=2\pi$$

משפט ניוטון לייבניץ נכון במובן מסויים גם עבור אינטגרל מסוג שני. נוכיח את הגרסא החלשה שלו.

תרגיל 5. תהי ϕ תבנית מדוייקת ורציפה ו $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה. תהי f כך ש $\mathbf{d}f=\phi$ עקומה חלקה. אזי

$$.\int_{\gamma}\phi=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

פתרון: נגדיר $g=f\circ\gamma$. לפי כלל שרשרת

$$g'(t)=f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=\phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \phi &= \int_a^b \phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_a^b g'(t)\,dt\\ &\overset{Newton-Leibnitz}{=} g(b)-g(a)\\ &= f(\gamma(b))-f(\gamma(a))\end{aligned}$$

בעזרת התרגיל האחרון, נראה שקיימות תבניות סגורות אך שאינן מדוייקות, כפי השבטחנו. ראשית, מהתרגיל נובע: **אם ϕ תבניות מבדוייקת ו γ עקומה חלקה וסגורה, אזי**

$$.\int_\gamma \phi = 0.$$

תרגיל 6. הראה שהתבנית

$$\phi(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

סגורה אך אינה מדוייקת.

פתרון: אפשר לוודא בקלות שהתבנית, סגורה על ידי גזירה. ננסה לחשב את $\int_\gamma \phi$ כאשר $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ ($t\in[0,2\pi]$). נקבל

$$\begin{aligned}\int_\gamma \phi &= \int_0^{2\pi} \phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathbf{d}t\\ &= \int_0^{2\pi} \langle(\sin t,-\cos t),(-\sin t,\cos t)\rangle\,\mathbf{dt}\\ &= \int_0^{2\pi} -1\mathbf{dt} = -2\pi\neq 0\end{aligned}$$

ולכן התבנית אינה מדוייקת.