תרגיל תיאורטי 1 - אלגברה לינארית להנדסה- שבועות 1-3

שאלה 1.1 תהי θ זוית שאינה כפולה של 2π

1. הוכיחו:

$$\operatorname{cis}\theta + \operatorname{cis}2\theta + \ldots + \operatorname{cis}n\theta = \frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta)}{1-\operatorname{cis}\theta}$$

רמז: השתמשו בנוסחא לסכום סדרה הנדסית.
פתרון: לפי כלל דה מואבר

$$\operatorname{cis}k\theta = (\operatorname{cis}\theta)^k$$

ולכן כתוב פה בעצם

$$\operatorname{cis}\theta + (\operatorname{cis}\theta)^2 + \ldots + (\operatorname{cis}\theta)^n$$

שזאת סדרה הנדסית עם איבר ראשון $\operatorname{cis}\theta$ ומנה $\operatorname{cis}\theta$. לפי נוסחא לסכום סדרה הנדסית. הסכום יוצא

$$\frac{\operatorname{cis}\theta(1-(\operatorname{cis}\theta)^n)}{1-\operatorname{cis}\theta} = \frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta)}{1-\operatorname{cis}\theta}$$

כנדרש

2. הוכיחו:

$$\sin\theta + \sin2\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\theta + \sin(n\theta) - \sin((n+1)\theta)}{2-2\cos\theta}$$

העזרו כמובן בסעיף הקודם.
פתרון: נשים לב ש

$$\sin\theta + \sin2\theta + \ldots + \sin n\theta = \operatorname{Im}(\operatorname{cis}\theta + \operatorname{cis}2\theta + \ldots + \operatorname{cis}n\theta) =$$
$$= \operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta)}{1-\operatorname{cis}\theta}\right)$$

כדי לחשב את החלק הדמיוני של הביטוי הזה, נכפיל בצמוד. נזכור ש $\overline{\operatorname{cis}\theta} = \operatorname{cis}(-\theta)$

$$\frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta)}{1-\operatorname{cis}\theta} = \frac{(\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta))(1-\operatorname{cis}(-\theta))}{(1-\operatorname{cis}\theta)(1-\operatorname{cis}(-\theta))} = \frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta) - 1 + \operatorname{cis}(n\theta)}{1-\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}(-\theta) + 1}$$
$$= \frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta) - 1 + \operatorname{cis}(n\theta)}{2-2\cos\theta}$$

החלק המדומה הוא באמת

$$\frac{\sin\theta + \sin(n\theta) - \sin((n+1)\theta)}{2-2\cos\theta}$$

כנדרש.

שאלה 1.2 נתונה מערכת משוואות המיוצגת במטריצה. חלק מהערכים לא ידועים ומסומנים ב $a_1,\dots,a_9$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & a_5 & 2 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & a_8 & 0 & a_9 & 0 \end{array}\right)$$

1. נתון שמטריצת המקדמים מדורגת. איזה ערכים לא ידועים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: יש 3 כאלה)
פתרון: היות שהמטריצה מדורגת. חייבים להיות אפסים מתחת ל 1 בעמודה הראשונה. ולכן $a_4=a_7=0$. בנוסף $a_8=0$ כי אם $a_8\neq 0$ אז הוא יהיה איבר מוביל והוא לא יהיה מימין לאיבר המוביל בשורה שמעליו (a_5 או 2).

2. נתון שמטריצת המקדמים מדורגת קנונית. איזה ערכים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: יש עוד שניים שאפשר לקבוע).
פתרון: כל איבר מוביל הוא 1 ולכן בהכרח $a_5=1$ כי ה2 שמימינו לא יכול להיות איבר מוביל. בנוסף $a_2=0$ כי הוא מעל איבר מוביל.

3. אם בנוסף נתון שיש 2 משתנים חופשיים. איזה ערכים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: נשאר רק ערך אחד שלא ניתן לקבוע).
פתרון: אם המשתנים הם $x_1,\dots,x_5$ אז אנחנו רואים ממה שגילינו בינתיים ש x_2,x_4 הם משתנים חופשיים. לכן x_5 לא אמור להיות חופשי וצריך להיות לו איבר מוביל בעמודה שלו. זה מכריח $a_9=1$ ולכן

$$a_6=a_3=0$$

4. מצאו את הפתרון הכללי של המערכת (עם תלות באיבר הלא ידוע שנשאר).
פתרון: קיבלנו בסופו של דבר את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

וקל לראות שהפתרון הכללי הוא

$$(-a_1 s, s, -2t, t, 0)$$

שאלה 1.3 האם הכפל של המטריצות הבאות מוגדר? אם כן, מה תוצאת הכפל?

.1

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 3 & 9 \\ 13 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} -11 & -76 & 110 & -61 \\ 24 & -82 & 95 & 5 \\ -12 & 9 & 11 & -5 \\ -10 & -24 & 42 & -6 \end{pmatrix}$$

.2

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

פתרון: לא מוגדר. זה נסיון לכפול

$$(4 \times 1) \cdot (4 \times 4)$$

הגדלים לא מתאימים.

.3

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 1.4 יהי n מספר טבעי ויהי a מספר ממשי או מרוכב. נסמן ב $(a)_{i,j}$ מטריצה בגודל $n \times n$ שבה כל האיברים הם 0 פרט למקום ה i, j שבו יש a. למשל אם $n = 3$ אז

$$(4)_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי

$$(a)_{i,j} \cdot (b)_{k,r} = \begin{cases} (ab)_{i,r} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

רמז: זה לא הכרחי, אבל יהיה נוח להעזר בכפל שורה־שורה וכפל עמודה־עמודה.
פתרון: לפי כפל שורה שורה

$$R_l((a)_{i,j} \cdot (b)_{k,r}) = R_l((a)_{i,j}) \cdot (b)_{k,r}$$

אם $l \neq i$ אז

$$R_l((a)_{i,j}) = 0$$

ולכן גם הכפל הוא 0. קיבלנו שכל השורות במכפלה, פרט אולי לשורה ה i הן 0.
בדומה נשתמש בכפל עמודה־עמודה

$$C_l((a)_{i,j} \cdot (b)_{k,r}) = (a)_{i,j} \cdot C_l((b)_{k,r})$$

שוב, אם $l \neq r$ אז

$$C_l((b)_{k,r}) = 0$$

ולכן כל העמודות במכפלה, פרט לעמודה ה r, הן 0. המקום היחיד שהוא אולי לא 0 זה המקום ה i, r. נבדוק מהו

$$[(a)_{i,j} \cdot (b)_{k,r}]_{i,r} = \sum_{l=1}^{n} [(a)_{i,j}]_{i,l} [(b)_{k,r}]_{l,r}$$

אם $l \neq j$ אז $[(a)_{i,j}]_{i,l} = 0$ ולכן כל הסכימה הזאת מצטמצמת ל

$$[(a)_{i,j}]_{i,j} [(b)_{k,r}]_{j,r}$$

ואם $j \neq k$ אז $[(b)_{k,r}]_{j,r} = 0$ והכל יוצא 0.
אם $j = k$ אז באמת נקבל

$$[(a)_{i,j}]_{i,j} [(b)_{k,r}]_{j,r} = ab$$

בסך הכל הוכחנו שאם $j \neq k$ כל מטריצת המכפלה היא 0.
ואם $j = k$ אז מריצת המכפלה היא 0 למעט המקום ה i, r שבו יש abזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

שאלה 1.5 תהינה $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$, $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכיחו כי

$$(A \cdot B)^t = B^t A^t$$

פתרון: נוכיח שלכל i, j מתקיים

$$[(A \cdot B)^t]_{i,j} = [B^t A^t]_{i,j}$$

טוב. נוכיח:

$$\begin{aligned}[(A\cdot B)^t]_{i,j} &= [A\cdot B]_{j,i} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{j,k}[B]_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n}[B]_{k,i}[A]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}[B^t]_{i,k}[A^t]_{k,j} \\ &= [B^tA^t]_{i,j}\end{aligned}$$

שאלה 1.6 תהי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את A^{5777}

פתרון: נשים לב ש

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned}A^{5776} = (A^2)^{2888} &= \begin{pmatrix} (1)^{2888} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2888} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2888} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I\end{aligned}$$

ולכן

$$A^{5777} = IA = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$