מד"ר - תרגול 3

5 בנובמבר 2013

מד"ר שמובילות למד"ר הומוגניות

$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ כך ש$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ (כלומר הישרים נחתכים). כדי לעבור למד"ר הומוגנית נציב $x=u+\alpha, y=v+\beta$ כאשר (α,β) נקודת החיתוך של הישרים. אם $a_1b_2-a_2b_1=0$ ההצבה $a_1x+b_2y+c_1=t$ תאפשר הפרדת משתנים.

תרגיל: $\frac{2x+y+1}{x+2y-1}=\frac{dy}{dx}$

פתרון: $a_1b_2-a_2b_1=2\cdot 2-1\cdot 1=3\neq 0$ כלומר הישרים נחתכים. נבדוק את נק' החיתוך ע"י מע' משוואות לינארית:

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\ x+2y-1=0 & \Rightarrow \alpha=-1,\beta=1\end{cases}$$

נציב $x=u-1, y=v+1 \Leftarrow dy=dv, dx=du$ **ונציב בחזרה במשוואה:**

$$\frac{dv}{du}=-\frac{2(u-1)+v+1+1}{u-1+2(v+1)-1}=-\frac{2u+v}{u+2v}$$

קיבלנו מד"ר הומוגנית.

$$v'=-\frac{2u+v}{u+2v}=\frac{-2+\frac{v}{u}}{1+2\frac{v}{u}}$$

נשתמש בהצבה $t=\frac{v}{u} \Leftarrow v=ut$:

$$\begin{aligned}tu'+u &= \frac{-2-t}{1+2t}\\ \int\frac{1+2t}{2t^2+2t+2}dt &= -\int\frac{du}{u}+c\\ c &= u\sqrt{t^2+t+1}\end{aligned}$$

נחזור למשתנה v **לקבל:**

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{\frac{v^2}{u^2}+\frac{v}{u}+1}=\sqrt{v^2+uv+u^2}\\ c^2 &= v^2+uv+u^2\end{aligned}$$

נציב בחזרה $u = x+!, v = y-1$:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+(x+1)(y-1)+(y-1)^2 &= c^2\\ x^2+y^2+xy+x-y &= c\end{aligned}$$

תרגיל נוסף: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}$

פתרון:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0$$

על כן, נציב $t = x+y+2$ ונקבל:

$$\begin{aligned}t\prime - 1 &= \frac{dy}{dx} = -\frac{t}{2t-5}\\ t\prime &= \frac{t-5}{2t-5}\\ \int \frac{2t-5}{t-5}dt &= \int dx + c\\ \int 2dt + \int \frac{5}{t-5}dt &= x+c\\ 2t + 5\ln\mid t-5\mid &= x+c\\ 2x+2y+4+5\ln\mid x+y-3\mid &= x+c\\ x+2y+4+5\ln\mid x+y-3\mid &= c\end{aligned}$$

משוואת מדויקות

הגדרה: נתונה משוואה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ המשוואה תקרא **מדויקת** אם מתקיים: $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. הפתרון הכולל יהיה מהצורה $g(x,y) = c$.

תרגיל: נתונה המשוואה $(\sin y + \cos x)dx + (x\cos y + y)dy = 0$. מצא את $g(x,y)$.

פתרון: נסמן
$$\begin{aligned}M(x,y) &= \sin y + \cos x\\ N(x,y) &= x\cos y + y\\ \frac{\partial M}{\partial y} &= \cos y = \frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}$$
ולכן המשוואה מדויקת.

הטכניקה: נשתמש בטכניקה הבאה: אם g מסמנת את הפונקציה הקבועה, אז מתקיים $\frac{\partial g}{\partial x}=M$. נקבל במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \sin y+\cos x\\ g(x,y) &= \int(\sin y+\cos x)dx+c(y)=x\sin y+\sin x+c(y)\end{aligned}$$

ובצורה דומה מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= N\\ x\cos y+c\prime(y) &= x\cos y+y\\ c\prime(y) &= y\\ \Rightarrow c(y) &= \frac{y^2}{2}+c_1\end{aligned}$$

לכן:

$$g(x,y)=x\cos y+y+\frac{y^2}{2}+c_1$$

ולכן הפיתרון הכללי יהיה

$$y=g(x,y)=x\cos y+y+\frac{y^2}{2}+c_1$$

$$\Rightarrow \boxed{x\cos y+\frac{y^2}{2}=c}$$

תרגיל: $2xy^2+2y+(2x^2y+2x)y\prime=0$

פתרון: נכפול ב-dx:

$$(2xy^2+2y)dx+(2x^2y+2x)dy=0$$

נגדיר $M(x,y)=2xy^2+2y, N(x,y)=2x^2y+2x$. נבדוק אם המשוואה מדויקת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 4xy+2\\ \| \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 4xy+2\end{aligned}$$

לכן התשובה מדויקת. לכן, נוכל לדרוש $\frac{\partial g}{\partial x} = M, \frac{\partial g}{\partial y} = N$, כלומר:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 2xy^2 + 2y \\
g(x,y) &= \int (2xy^2 + 2y)dx + c(y) \\
&= x^2y^2 + 2yx + c(y) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2x^2y + 2x \\
c\prime(y) + 2x^2y + 2x &= 2x^2y + 2x \\
c\prime(y) &= 0 \\
c(y) &= c
\end{aligned}$$

נציב בחזרה ב$g(x,y)$:

$$g(x,y) = x^2y^2 + 2xy + c \Rightarrow c = x^2y^2 + 2xy - y$$

גורם אינטגרציה

נתונה משוואה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ משוואה שאינה מדויקת. אם קיימת $I(x,y)$ כך ש: $I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = 0$ משוואה מדויקת אזי $I(x,y)$ נקרא גורם אינטגרציה.

תרגיל: פתור $ydx - xdy = 0$ ע"י גורם אינטגרציה.

פתרון: נעיר שהיינו יכולים לפתור גם ע"י הפרדת משתנים. נסמן $M(x,y) = y, N(x,y) = -x, \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$ לכן המשוואה אינה מדויקת. ננחש $I(x,y) = x^\alpha y^\beta$ ור"ל את α, β. נכפיל את המשוואה ונקבל: $x^\alpha y^{\beta+1}dx - x^{\alpha+1}y^\beta dy = 0$ וזו כמובן משוואה מדויקת, לכן $(\beta+1)x^\alpha y^\beta = -(\alpha+1)x^\alpha y^\beta \Leftarrow \beta + 1 = -\alpha - 1 \Leftarrow \alpha + \beta = -2$. ז"א שבמקרה הנ"ל יש יותר מגורם אינטגרציה אחד, לדוגמה $\frac{y}{x^2}dx - \frac{x}{x^2}dy = 0 \quad , I(x,y) = \frac{1}{x^2}$.

כללים למציאת גורם אינטגרציה:

1. אם $\frac{M_y - N_x}{N} = u(x)$ אז ניתן למצוא את גורם האינגרטציה ע"י מציאת פתרון למשוואה $I\prime(x) - u(x)I(x) = 0$. נקבל $I(x) = e^{\int u(x)dx}$.

2. אם $\frac{M_y - N_x}{M} = u(y)$ אז ניתן למצוא גורם אינטגרציה ע"י מציאת פתרון למשוואה: $I\prime(x) + u(y)I(x) = 0$ ונקבל $I(x) = e^{-\int u(y)dy}$.

תרגיל: $\left(\frac{y}{x} - \sin x\right) dx + dy = 0$

פתרון:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{x}, N_y = 0 \\ \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{1}{x} = u(x) \end{aligned}$$

לכן, מקרה 1 מתקיים .

$$I = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$$

נכפול בגורם האינטגרציה ונקבל:

$$(y - x\sin x)dx + xdy = 0$$

זו משוואה מדויקת.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= x, \frac{\partial g}{\partial x} = y - x\sin x \\ \Rightarrow g(x,y) &= xy + c(x) \\ y + c\prime(x) &= y - x\sin x \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= -x\sin x \\ C(x) &= \int x\sin x dx + c_1 \\ &= -x\cos x - \int \cos x dx + c_1 \\ \begin{bmatrix} f = x & g = \sin x \\ f\prime = 1 & g\prime = \cos x \end{bmatrix} & \\ &= -x\cos x - \sin x + c_1 \\ \Rightarrow &= xy - x\cos x + \sin x + c_1 \end{aligned}$$

כלל 3: אם $\begin{cases} M = y \cdot fx, y) \\ N = x \cdot g(x,y) \end{cases}$ אז מתקיים $g(x,y) = \frac{1}{xM - yN}$.

תרגיל: $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

פתרון:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 - 2yx \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1 + 2xy^2 \end{aligned}$$

זו משוואה לא מדויקת, נשתמש בגורם אינטגרציה.

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &= y - xy^2 = y\underbrace{(1-xy)}_{f(x,y)} \\
N(x,y) &= x + x^2y^2 = x\underbrace{(1+xy^2)}_{g(x,y)} \\
I(x,y) &= \frac{1}{xM - yN} = \frac{1}{x(y-xy^2) - y(x+x^2y^2)} = \frac{1}{-x^2y^2 - x^2y^3}
\end{aligned}
$$

נכפול את כל המשוואה ב$\frac{1}{xy}$ כי במקרה הזה צא גורם אינטגרציה מסובך. כשיש פולינום, גורם האינטגרציה יהיה מהצורה $I(x,y) = x^\alpha \cdot y^\beta$ ונקבל:

$$(\frac{1}{x} - y)dx + (\frac{1}{y} + xy)dy = 0$$

נחלק עוד פעם בxy:

$$(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x})dx + (\frac{1}{xy^2} + 1)dy = 0$$

<u>וזו משוואה מדויקת.</u>