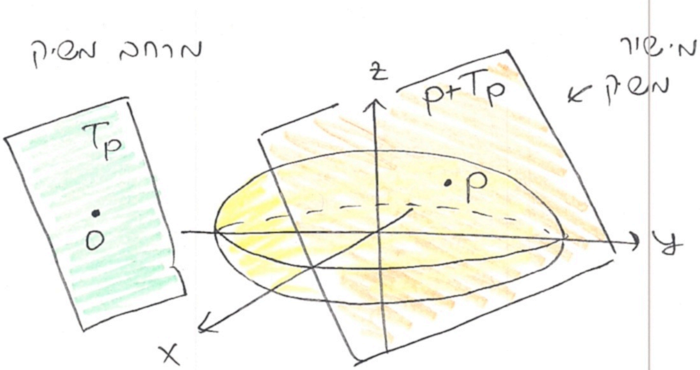
תרגול: מצאו את משוואת המישור המשיק לאליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$ בנקודה $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ שעליו.



פתרון:

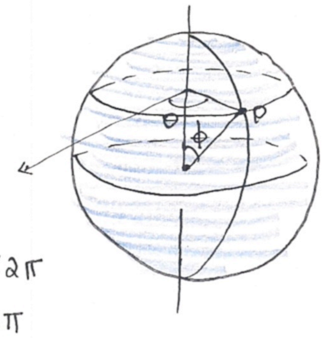
(דרך א') נמצא פרמטריזציה לאליפסואיד

ניעזר בפרמטריזציה של ספירת היחידה S^2 המוכרת מקואורדינטות ספריות:

$$X:\Omega\longrightarrow S^2$$

$$(\phi,\theta)\longrightarrow(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi)$$

(זו פרמטריזציה ע"י קווי אורך ורוחב)



$0\leq\theta<2\pi$

$0\leq\phi<\pi$

כאשר עובדים עם אליפסואיד מתייחסים אליו כאל "מתיחה" של הספירה בהתאם למקדמים. כלומר:

$$\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2+z^2=1\right)\longrightarrow\quad X:\Omega\longrightarrow M$$

$$(\phi,\theta)\longrightarrow(2\sin\phi\cos\theta,3\sin\phi\sin\theta,\cos\phi)$$

על מנת למצוא את המישור המשיק ב-p נמצא תחילה את ϕ ו-θ המתאימות ל-p.

$$(2\sin\phi\cos\theta,3\sin\phi\sin\theta,\cos\phi)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$* \quad \cos\phi=\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\sin\phi=\sqrt{\frac{2}{3}}\rightarrow\cos\theta=\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

נמצא את הווקטורים המשיקים שפורשים את המרחב המשיק:

$$\begin{cases}X_\phi=(2\cos\phi\cos\theta,3\cos\phi\sin\theta,-\sin\phi)\\ X_\theta=(-2\sin\phi\sin\theta,3\sin\phi\cos\theta,0)\end{cases}$$

$\leftarrow$ בנקודה p, נציב את *

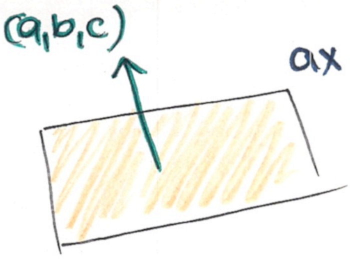
$$X_\phi(p)=\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$X_\theta(p)=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},0\right)$$

ולכן ההצגה הפרמטרית של המישור המשיק ב-p היא:

$$p+T_p(t,k)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+t\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+k\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},0\right)$$

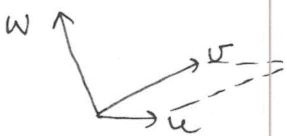
אבל... צריך למצוא משוואת מישור, מהצורה $ax+by+cz+d=0$



ניזכר בעובדה שעבור משוואת מישור $ax+by+cz+d=0$
הווקטור (a,b,c) מאונך למישור

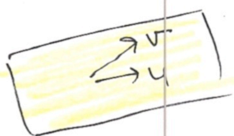
מכפלה וקטורית

תזכורת: עבור 2 וקטור $u,v\in\mathbb{R}^3$ בה"ל הווקטור $w=u\times v$
הוא וקטור שמאונך ל u ול- v.



בנוסף $|w|=|u\times v| = S_{\text{מקבילית}}$

$u=\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
$v=\left(-\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3,0\right)$



אנו יודעים שהמישור T_p נפרש ע"י

ולכן בכדי לחשב וקטור מאונך ניעזר במכפלה וקטורית

$$u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt3} & \sqrt3 & 0 \end{vmatrix} = \left(\sqrt2,\frac{2\sqrt2}{3},2\sqrt2\right)$$

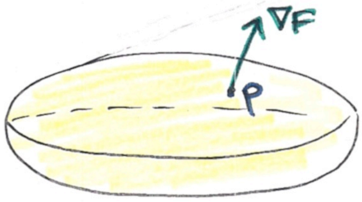
← הווקטור $\underline{n}=\left(\sqrt2,\frac{2\sqrt2}{3},2\sqrt2\right)$ מאונך למישור המשיק

← הווקטור $\frac{3}{\sqrt2}\underline{n}=(3,2,6)$ מאונך למישור המשיק

← משוואת המישור המשיק $3x+2y+6z+d=0$ והוא עובר ב- $\left(\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3,\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$3\cdot\frac{2}{\sqrt3}+2\sqrt3+6\cdot\frac{1}{\sqrt3}+d=0 \Leftarrow d=-6\sqrt3 \Leftarrow 3x+2y+6z-6\sqrt3=0$

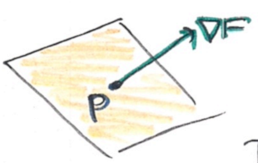
(דרך ב')



ניזכר - המשטח הנתון M הוא **משטח רמה** של הפונקציה $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2$

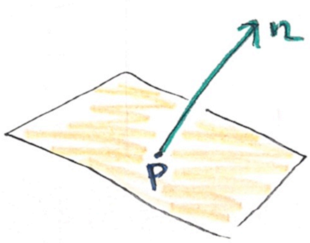
$$\nabla F=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},2z\right)$$

הוא שדה וקטורי ב $\mathbb{R}^3$ שבכל נקודה על משטח הרמה M מאונך לו



מפרט, בנקודה p ← $\nabla F(p)$ **מאונך למישור המשיק**

$p=\left(\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3,\frac{1}{\sqrt3}\right) \leftarrow \nabla F(p)=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{2}{3\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3}\right)$ מאונך ל T_p



נכפול ב- $3\sqrt3$ ← ונקבל $n=(3,2,6)$

$\Downarrow$

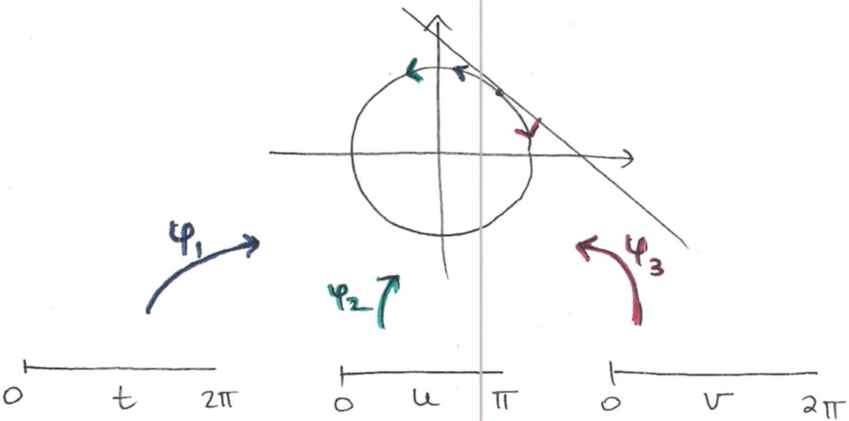
$p=\left(\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3,\frac{1}{\sqrt3}\right)$ $3x+2y+6z+d=0$

⋮

אוריינטציה של יריעה M היא בחירת כיוון ל"טיול" על היריעה בכל נקודה שעליה.

אוריינטציה של עקומות:

דוגמה - מעגל ב-$\mathbb{R}^2$:

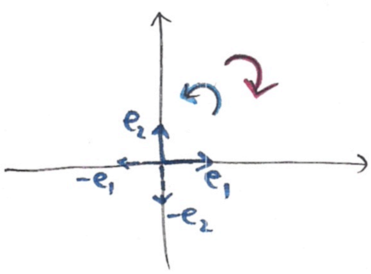


$\varphi_1(t)=(\cos t,\sin t)$ $\quad\varphi_2(u)=(\cos 2u,\sin 2u)$ $\quad\varphi_3(v)=(\cos v,-\sin v)$

הפרמטריזציות φ_2 ו φ_3 מתקבלות ע"י הרכבה של φ_1 עם $t=2u$ ו $t(v)=-v$

$\frac{dt}{du}=2>0$ $\qquad \frac{dt}{dv}=-1<0$

⇐ φ_1 ו φ_2 מגדירות אותה אוריינטציה
φ_3 מגדירה אוריינטציה הפוכה



אוריינטציה במישור - בחירה של כיוון הסיבוב
מגדירים בחירה זו באמצעות בסיס סדור

$(e_1,e_2)\sim(e_2,-e_1)\sim(-e_1,-e_2)$

$(e_2,e_1)\sim(e_1,-e_2)$

את **שקילות בחירת הבסיס** מגדירים ע"י דטרמיננטה של מטריצת המעבר
שני בסיסים (b_1,b_2), (c_1,c_2) המקיימים $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$\det A>0$ ← הבסיסים מגדירים אותה אוריינטציה
$\det A<0$ ← הבסיסים מגדירים אוריינטציה הפוכה.

(e_1,e_2) נקרא **בסיס סטנדרטי** ולכן ↺ **אוריינטציה סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^2$**

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ -e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

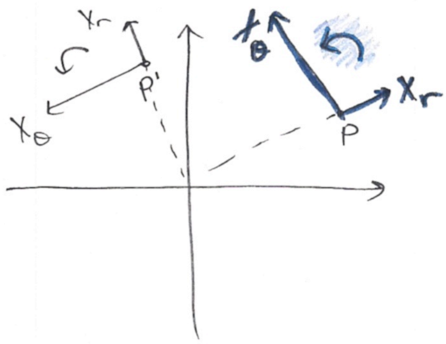
$(e_2,-e_1)$ מגדיר את ↺ $\qquad$ $(e_1,-e_2)$ מגדיר את ↻

<u>תרגיל</u>: הראה שהפרמטריזציה

$$X:\left\{(\theta,r) \,\middle|\, \begin{matrix} 0\le\theta<2\pi \\ 0<r \end{matrix}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$$

$$(\theta,r) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

מגדירה אוריינטציה שקולה לאוריינטציה הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^2$.



<u>**פתרון**</u>: בכל נקודה $p \in \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ ב X משרה אוריינטציה ע"י הבסיס (X_r,X_θ)

נחשב:

$$X_r = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

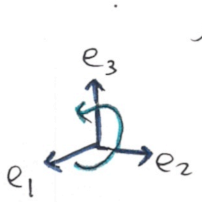
הבסיס (X_r,X_θ) משתנה מנק' לנק' אך תמיד האוריינטציה שקולה ל (e_1,e_2)

נראה כאן:

$$\begin{pmatrix} X_r \\ X_\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$\det = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0 \Rightarrow$ האוריינטציות שקולות.

באופן כללי - ב-$\mathbb{R}^n$: $(e_1,\dots e_n)$ בסיס סטנדרטי המשרה אוריינטציה סטנדרטית.



ושני בסיסים $b' = Ab$

$\det A > 0 \Rightarrow$ b ו b' משרים אותה אוריינטציה

$\det A < 0 \Rightarrow$ b ו b' משרים אוריינטציה הפוכה.