פתרון לתרגיל 4 באינפי 3

.1

(א) נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$$

ולכן

$$\lim_{y\to 0} h(y) = -1$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = 1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן ברור שלפונקציה המקורית אין גבול.

(ב) נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x\to 0}(x+y)(\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y})$$

אם $y \neq 0$ גבול זה לא קיים. לכן הגבול החוזר לא קיים. בדומה קל להראות שגם הגבול החוזר השני לא קיים. אבל הגבול דווקא קיים כי

$$|(x+y)(\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y})| \leq x+y \to 0$$

(ג) נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי yנקבל:

$$h(y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

ולכן

$$\lim_{y\to 0} h(y) = 0$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן הגבול לא קיים.

(ד) נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי yנקבל:

$$h(y)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin y}{x+y}=\frac{\sin y}{y}$$

ולכן

$$\lim_{y\to 0}h(y)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x+\sin y}{x+y}=1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0}g(x)=1$$

נראה שהגבול ב $(0,0)$ לא קיים. נתקדם ל $(0,0)$ על $x=-\sin y$ ונקבל שלאורך מסלול זה $f(x,y)=0$. ולכן

$$\lim_{y\to 0}f(-\sin y,y)=0$$

שזה שונה מהגבולות החוזרים ולכן הגבול לא קיים.

2. היות ו f רציפה על קבוצה קומפקטית אנחנו יודעים שלפונקציה f קיים מינימום ב E. נסמן את ערך המינימום ב M. לכן קיים $x_0\in E$ כך ש $f(x_0)=M$ ולכל $x\in E$ מתקיים כי $f(x)\geq M$. כמו כן, ברור ש

$$f(x,y)=x^2+\cos^2 e^{\frac{x}{y}}\geq 0$$

נניח שקיימים x,y עבורם

$$f(x,y)=x^2+\cos^2 e^{\frac{x}{y}}=0$$

זה בהכרח אומר ש

$$x^2=0\quad \cos^2 e^{\frac{x}{y}}=0$$

אבל זה מכריח ש $x=0$ ובמצב זה

$$\cos^2 e^{\frac{x}{y}}=\cos^2 1\neq 0$$

לכן לא קיימים x,y עבורם $f(x,y)=0$ ולכן בהכרח $f(x,y)>0$. מכאן ברור ש $f(x_0)=M>0$ ולכן M מקיים את הדרוש.

3.

(א) מסתבר שבשאלה הזאת יש טעות.אחד הסטודנטים הראה לי את הדוגמא הבאה:
ניקח את התחום $D = [-1,1] \times [-1,1]$. ונגדיר

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{|x|} & |y| \le |x| \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{|x|}{|y|} & |x| < |y| \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

אם נחזיק את $x = x_0$ קבוע. נקבל שהפונקציה $f(x_0, y)$ רציפה. בגלל שהיא מוגדרת על תחום סגור היא גם רציפה במידה שווה. אם נחזיק את $y = y_0$ קבוע נקבל שלכל y_0 הפונקציה $f(x, y_0)$ היא רציפה על תחום סגור ולכן רציפה במידה שווה. אבל $f(x,y)$ לא רציפה ב $(0,0)$ כי התקדמות על ציר y תתן ש

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$$

והתקדמות על הישר $x = y$ תתן לנו ש

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 1$$

(ב)

i. לא. נבחר את הסדרה $a_n = (\sqrt{1 - \frac{1}{\pi n}}, 0)$ ואת הסדרה $b_n = (\sqrt{1 - \frac{1}{\pi(n+1)}}, 0)$.
ברור ש $a_n, b_n \in D_1$ ו

$$a_n \to (1,0) \quad b_n \to (1,0)$$

ולכן ממילא

$$||a_n - b_n|| \to 0$$

אבל

$$f(a_n) = \cos \pi n \quad f(b_n) = \cos \pi(n+1)$$

ולכן

$$||f(a_n) - f(b_n)|| = ||\cos \pi n - \cos \pi(n+1)|| = ||(-1)^n 2|| = 2$$

ולכן הפונקציה לא מתכנסת במידה שווה על תחום זה.

ii. כן. נרחיב את תחום ההגדרה לתחום ההגדרה

$$\{(x,y) \mid 3 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

זוהי קבוצה סגורה וחסומה ו f רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במידה שווה עליו. ממילא f רציפה במידה שווה על D_2.

.4

(א) הפרכה. ניקח

$$f(x,y)=y$$

$$a=(1,0)\quad b=(-1,0)$$

$$\gamma_1(t)=(\cos\pi t,\sin\pi t),\quad \gamma_1(t)=(\cos\pi t,-\sin\pi t)$$

מסילות אלה מקיימות את כל מה שנדרש בשאלה אבל אם $t\in(0,1)$ נקבל כי

$$f(\gamma_1(t))=\sin\pi t>0>-\sin\pi t=f(\gamma_2(t))$$

i. הוכחה: ראשית, ברור כי אם $f(a)=f(b)$ אז הטענה נכונה כי

$$f(\gamma_1(0))=f(a)=f(b)=f(\gamma_2(0))$$

לכן ניתן להניח $f(a)\neq f(b)$ בלי הגבלת כלליות $f(b)>f(a)$. נגדיר

$$g(t)=f(\gamma_1(t))-f(\gamma_2(t))$$

מתקיים כי

$$g(0)=f(a)-f(b)<0$$

ו

$$g(1)=f(b)-f(a)>0$$

בנוסף, g רציפה (כהרכבת רציפות). ולכן, לפי משפט ערך הביניים (של אינפי 1) קיים t_0 כך ש

$$g(t_0)=0$$

שזה אומר

$$f(\gamma_1(t_0))=f(\gamma_2(t_0))$$