

**אנליזה 1 למורים - פתרון תרגיל 4**

דרכים לחישובי גבולות שניתן להתשמש בהם שראינו:

1. משפט הסנדויץ'
2. אפיסה כפול חסומה שווה אפיסה
3. הכפלה בצמוד
4. בהינתן סדרה מתכנסת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  אזי עבור  $b > 1$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^b = L^b$
5. עבור  $a > 0$  מתקיים:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

חשבו את הגבולות של הסדרת הבאות:

$$1. a_n = \left( \frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1} \right)^4$$

פתרון

נחשב את הגבול של הסדרה  $\frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 \left( 6 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3} \right)}{n^3 \left( 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( 6 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3} \right)}{\left( 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} \right) = \frac{6}{3} = 2$$

ולכן מהטענה 4 הנ"ל נקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1} \right)^4 = 2^4$$

$$2. a_n = \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$$

פתרון

כדי לחשב את הגבול נכפיל בצמוד:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (n+5-n)}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n}}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n\left(1+\frac{5}{n}\right)} + \sqrt{n}\right)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{n}\right)} + 1\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{n}\right)} + 1\right)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{(2n)! + (2n-1)!}{(2n)! + (2n+1)!} \quad .3$$

פתרון

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + (2n-1)!}{(2n)! + (2n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)! \cdot (2n+1)}{(2n)! \cdot (1+2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)! \cdot (2n+1)}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot (1+2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{2n \cdot (1+2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{4n^2 + 4n} = 0 \end{aligned}$$

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n} \quad .4$$

פתרון

נשים לב כי מתקיים:

$$3^n \leq 3^n + 2^n \leq 3^n + 3^n$$

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$$

$$3 \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{2}$$

והרי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 3 \cdot 1 = 3$$

ולכן לפי משפט הסנדוויץ' נקבל כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$$

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2 + 1}{n^2}} \quad .5$$

פתרון

נסתכל על הדבר בתוך השורש:

$$\frac{2n^2+1}{n^2} = \frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2}$$

ולכן מתקיים:  $2 \leq 2 + \frac{1}{n^2} \leq 3$ .

$$\text{ולכן: } \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{3}$$

והרי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

ולכן פי משפט הסנדויץ':  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{n^2}} = 1$

$$a_n = \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \quad 6.$$

רמז: תשתמשו בשיטת הסנדויץ' ותמצאו את שתי הסדרות האחרות ע"י הגדלה והקטנת כל מכנה.

### פתרון

נשים לב כי מתקיים:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} = \frac{n+1}{(2n)^2} = \frac{n+1}{4n^2}$$

ולכן נקבל:

$$\frac{n+1}{n^2} \leq a_n \leq \frac{n+1}{4n^2}$$

מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n^2} = 0$$

ולכן פי משפט הסנדויץ':  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$a_n = \frac{2n + \sin(n)}{n + \cos(2n)} \quad .7$$

פתרון

נשים לב כי מתקיים:  $-1 \leq \sin(n) \leq 1, -1 \leq \cos(2n) \leq 1$   
 ולכן כדי למצוא סדרה קטנה יותר נרצה להקטין את המונה ולהגדיל את המכנה וכדי למצוא סדרה גדולה יותר נרצה להקטין את המכנה ולהגדיל את המונה:

$$\frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n + \sin(n)}{n + \cos(2n)} \leq \frac{2n+1}{n-1}$$

נשים לב כי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2$$

ולכן לפי משפט הסנדוויץ':  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sin(n)}{n + \cos(2n)} = 2$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad .8$$

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \dots \frac{2}{n} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \quad \text{רמז:}$$

תשתמשו בשיטת הסנדוויץ'.

פתרון:

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \quad \text{לפי הרמז מתקיים:}$$

והרי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2 \cdot 0 = 0$$

ולכן לפי משפטי הסנדוויץ':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$a_n = \frac{2^n \cdot \cos(n)}{(2n)!} \quad .9$$

רמז: תשמשו במה קיבלתם בסעיף הקודם ובמשפט הסנדויץ'.

פתרון

נשים לב כי מתקיים:  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$$\frac{2^n \cdot (-1)}{(2n)!} \leq \frac{2^n \cdot \cos(n)}{(2n)!} \leq \frac{2^n \cdot (1)}{(2n)!} \quad \text{ולכן מתקיים:}$$

לפי הסעיף הקודם נקבל כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot (-1)}{(2n)!} = -1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{(2n)!} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot (1)}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{(2n)!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \cos(n)}{(2n)!} = 0 \quad \text{ולכן לפי משפט הסנדויץ':}$$

$$a_n = \frac{\sin(n^2 + 1)}{n^2} \quad .10$$

פתרון:

נסמן שתי סדרות:

$$b_n = \sin(n^2 + 1)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}$$

נשים לה כי  $b_n$  סדרה חסומה ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2 + 1)}{n^2} = 0 \quad \text{ולכן לפי משפט אפיסה כפול חסומה שווה אפיסה נקבל:}$$