תרגיל

$$f(x)=x^4-6x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$$

הראו את התאמת גלואה.

פתרון

הפולינום אי־פריק לפי איזנשטיין(עבור $p=2$).

$$y=x^2$$

$$f(y)=y^2-6y-2$$

$$\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{3+\sqrt{11}}\qquad\alpha_{3,4}=\pm\sqrt{3-\sqrt{11}}$$

משיה א': להראות ש$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})\simeq D_4$[1] כאשר E שדה הפיצול של $f(x)$ מעל $\mathbb{Q}$. נראה $[E:\mathbb{Q}]=8$:

$$\begin{array}{c} E=\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_3)\\ {\scriptstyle 2}\Big| \\ F=\mathbb{Q}\left(\alpha_1=\sqrt{3+\sqrt{11}}\right)\\ {\scriptstyle 4}\Big| \\ \mathbb{Q}\end{array}$$

כי α_1 שורש של $f(x)$ והוא אי־פריק מדרגה 4. נשים ♡ ש$E=F(\alpha_3)$, אבל בגלל ש$\sqrt{11}\in F$ נקבל $[E:F]\le 2$ אבל לא ייתכן שזה שווה ל1 כי α_3 מרוכב.

לכן $|\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})|=8\Longleftarrow[E:\mathbb{Q}]=8$, כלומר $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})\hookrightarrow S_4$ $\Longleftarrow$ $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})\cong D_4$ כי כל ת"ח מסדר 8 בS_4 הן חבורות 2־סילו ולכן איזומורפיות, וגם D_4 אחת מהן.

הערה: פולינום אי־פריק $f\in\mathbb{Q}[x]$ מדרגה p ראשונית עם שני שורשים מרוכבים $\Longleftarrow$ $\mathrm{Gal}\simeq S_p$. הראנו שאם קיים מחזור מאורך p וחילוף $\Longleftarrow$ הם יוצרים את כל S_p(לא טריוויאלי)

נחזור לתרגיל:

$$\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{3+\sqrt{11}}\qquad\alpha_{3,4}=\pm\sqrt{3-\sqrt{11}}$$

[1] D_4 היא החבורה הדיאדרלית מסדר 4: $D_n:=\left\langle s,r\middle|s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}\right\rangle$

$$
\begin{tikzcd}
& E=\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_3) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}(\alpha_1) \arrow[dr, dash, "2"'] & & \mathbb{Q}(\alpha_3) \arrow[dl, dash, "2"] \\
& \mathbb{Q}\left(\sqrt{11}\right) \arrow[d, dash, "2"] & \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& E \ \alpha_1+\alpha_2 \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{-2}\right) \arrow[dl, dash, "\mathrm{Gal}(E/K\ni\pi)"', "2"] \\
\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_3) \arrow[d, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2}\right) \arrow[d, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
$$

$$(\alpha_1+\alpha_3)^2 = 6 + 2\sqrt{-2}$$

$$f(x) = \underbrace{\left(x^2+(\alpha_1+\alpha_3)x+\sqrt{-2}\right)}_{=(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)}\underbrace{\left(x^2-(\alpha_1+\alpha_3)+\sqrt{-2}\right)}_{=(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}$$

בהכרח שני הגורמים אי־פריקים.

E/K הרחבת גלואה(כי ההרחבה מדרגה 2). קיים אוטומורפיזם $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \ni \pi = (1\,3)(2\,4)$

$$(1\,2),(3\,4) \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

$$\sigma = \pi(1\,2) = (1\,4\,2\,3) \qquad \tau = (1\,2)$$

10 ת"ח של D_4:

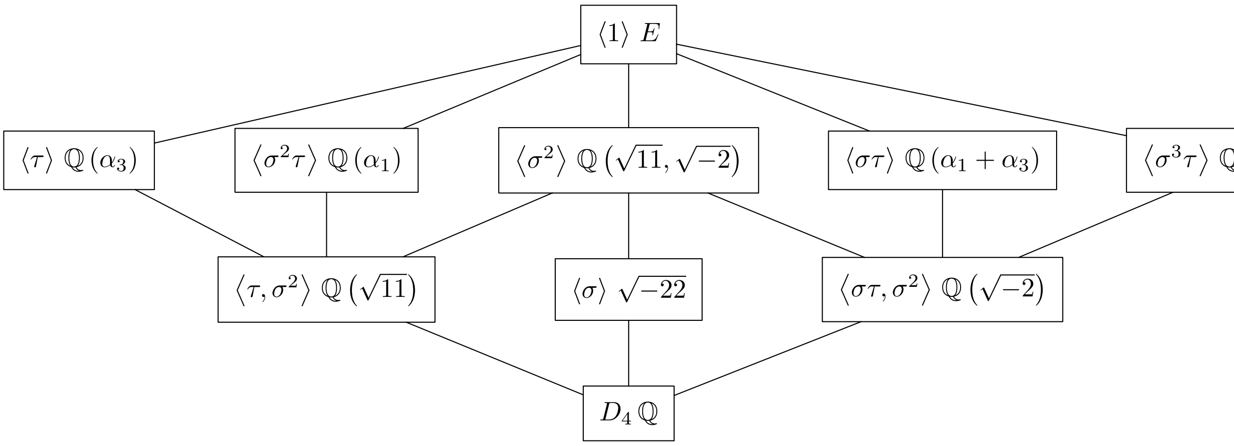
- טריויאליות: $D_4, \{(1)\}$
- תח"נ יחידה מסדר 2: $\left\langle \sigma^2 = (1\,2)(3\,4)\right\rangle$
- 4 ת"ח מסדר 2:

$$\langle \tau = (1\,2)\rangle \qquad \langle \sigma\tau = (1\,3)(2\,4)\rangle \qquad \left\langle \sigma^2\tau = (3\,4)\right\rangle \qquad \left\langle \sigma^3\tau = (1\,4)(2\,3)\right\rangle$$

- 3 ת"ח מסדר 4:

$$\langle \sigma \rangle \qquad \left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle \qquad \left\langle a^2, \sigma\tau \right\rangle$$

ובגרף:



איך מחשבים את הפולינום הציקלוטומי Φ?

$$\Phi_n = \frac{x^n - 1}{\prod\limits_{\substack{d \mid n \\ d < n}} \Phi_d}$$

$$\prod_{d \mid n} \Phi_n = x^n - 1$$

$x^n - 1$ הוא ספרבילי.

$$\deg \Phi_n = \varphi(n) = |U_n|$$

דוגמה

חישוב Φ_{15}:

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$\Phi_{15} = \frac{x^{15} - 1}{\Phi_1 \Phi_3 \Phi_5} = \frac{x^{15} - 15}{(x^5 - 1)\,\Phi_3} = \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1} = \cdots$$

עוד דוגמה

חישוב Φ_{16}:

$$x^{16}-1=\left(x^{8}-1\right)\left(x^{8}+1\right)$$

$$\varphi\left(16\right)=8$$