...
$N\left(J_e\right)$ היא תת החבורה המקסימלית של $\pi_1\left(B,b\right)$ המכילה את J_e ובתוכה J_e נורמלית.
קיבלנו העתקה $N\left(J_e\right)\underset{\varphi\mapsto A_\varphi}{\rightarrow}\mathrm{Aut}\left(E\right)$. A_φ הוא האוטומורפיזם היחיד כך ש$A_\varphi=\widehat{\varphi}^e\left(1\right)$.
...
אם $\varphi\left(0\right)=e$ אז $A_\varphi\left(\gamma\left(1\right)\right)=\widehat{\varphi*\left(p\circ\gamma\right)}^e\left(1\right)$.
נסמן $\delta=p\circ\gamma$: הנ"ל יתפרש כך: אם $\delta\left(0\right)=b$ אז $A_\varphi\left(\widehat{\delta}^e\left(1\right)\right)=\widehat{\varphi*\delta}^e\left(1\right)$.
כעת ניקח $\delta\in N\left(J_e\right)$(עדיין גם $\varphi N\left(J_e\right)$)

$$A_\varphi\left(A_\delta\left(e\right)\right)=A_\varphi\left(\widehat{\delta}^e\left(1\right)\right)=\widehat{\varphi*\delta}^e\left(1\right)=A_{\varphi*\delta}\left(e\right)$$

וכיוון שאוטומורפיזם נקבע ביחידות ע"פ פעולתו על e:

$$A_\varphi\circ A_\delta=A_{\varphi\delta}$$

הראנו שזהו הומומורפיזם. הגרעין הוא J_e עצמו.

הערה זוהי פעולה שמאלית, שכן A_φ פועלת אחרי A_δ.

משפט

$$N\left(J_e\right)/J_e\cong\mathrm{Aut}\left(E\right)$$

נימוק לגבי הגרעין

φ נמצא בגרעין אס"ם $A_\varphi\left(e\right)=e$ אס"ם $\widehat{\varphi}^e\left(1\right)=e$ אס"ם $\varphi\in J_e$.

פעולה ימנית

פועלת על הסיב. לוקחים את φ ומרימים אותו מx

$$x\left[\varphi\right]=\widehat{\varphi}^x\left(1\right)$$

פעולה שמאלית

$$\varphi\in N\left(J_e\right)$$

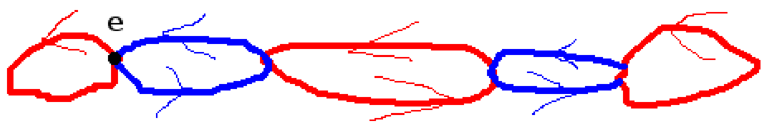
$$\left[\varphi\right]x=A_e\left(x\right)$$

כאשר A_φ האוטומורפיזם היחיד שמקיים $A_\varphi\left(e\right)=\widehat{\varphi}^e\left(1\right)$

תאור יותר מפורט: בהנתן $x \in E$ נבחר מסילה γ מ e ל x.

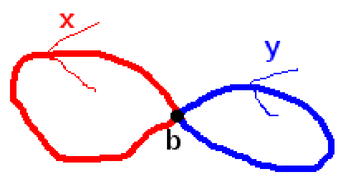
$$[\varphi]\, x = \widehat{\varphi * \rho \circ \gamma}^{e}(1) = \widehat{\rho \circ \gamma}^{\widehat{\varphi}^{e}(1)}$$

דוגמה:



: F_5. יש

שיכון p_* של זה ב:



F_2:.

p_* היא שיכון של F_5 בתוך F_2. $J_e \cong F_5$, $[F_2, J_e] = 4$

מיהם 5 היוצרים החדשים של תת החבורה הזאת של F_2? $x, y^2, yx^2y^{-1}, yxy^2x^{-1}y^{-1}, yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$.

$$[N(J_e) : J_e] = ?$$

$$N(J_e)/J_e \cong \mathrm{Aut}(E)$$

ולכן $\left|N(J_e)/J_e\right| = 2$.

הערה למשפט מקודם

אם J_e נורמלית אז $N(J_e) = \pi_1(B,b)$ ואז $\mathrm{Aut}(E) = \pi_1(B,b)/J_e$

משפט(ניתן בהמשך קוים כלליים להוכחה)

יהי B מרחב טופולוגי קשיר מסילתית ופשוט קשר מקומית, ותהי $H \subseteq \pi_1(B,b)$ תת חבורה.
אזי קיים מרחב כיסוי (E,e) של (B,b) כך ש$J_e = H$

בהנתן המשפט הנ"ל, הבה נוכיח משפטים בתורת החבורות.

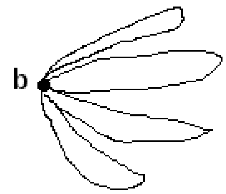
משפט

תת חבורה של חבורה חפשית היא חפשית.

הוכחה

תהי $H \subseteq F_n$(במקרה הזה n יכול להיות גם עצמה אינסופית).

נביט בזר של n מעגלים: $B =$



$$\pi_1(B,b) = F_n$$

$H \subseteq F_n$ לכן יש מרחב כיסוי $(E,e) \rightharpoonup (B,b)$ כך ש$J_e = H$.

מצד שני, $J_e \cong \pi_1(E,e)$.

E הוא גם כן גרף, ולכן $\pi_1(E,e)$ הוא חבורה חפשית.

משפט

יהי n טבעי, ותהי $H \subseteq F_n$ תת חבורה מאינדקס סופי k. אזי $H \cong F_{kn-k+1}$

הוכחה

נתחיל מזר של n מעגלים. $H \subseteq F_n$ מתאימה לכיסוי E מסדר k. בE יש k קדקדים וkn צלעות, לכן

$$\pi_1(E,e) \cong F_{\underbrace{kn-k+1}_{=m}}$$

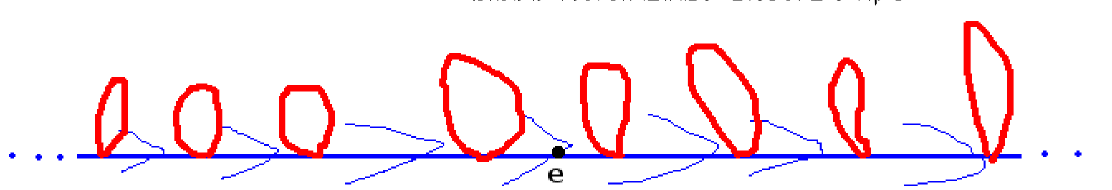
$$m - 1 = k(n-1)$$

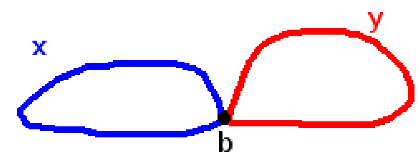
הערה חשובה

כל חבורה היא חבורה יסודית של מרחב טופולוגי: אם יש לנו חבורה הנתונה ע"י יוצרים ויחסים, בונים זר עם מעגל לכל יוצר, ומדביקים דיסקים לפי היחסים.

דוגמאות

ניקח סיב אינסופי שמחוברות אליו לולאות:





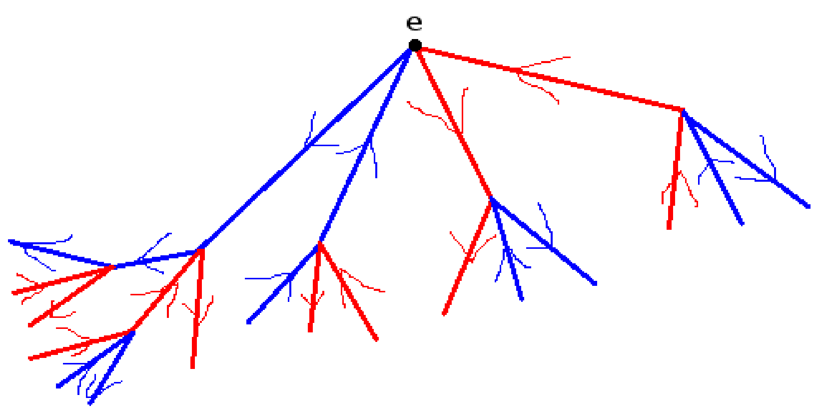
זה כיסוי של:

האוסף בן המנייה של האיברים $\{x^n y x^{-n} | n \in \mathbb{N}\}$ הם יוצרים חדשים של תת החבורה(שהיא נורמלית) המתאימה לכיסוי הנ"ל.

מהי חבורת המנה? איזומורפית לחבורת האוטומורפיזמים $\mathbb{Z}$.

יש גם מרחב כיסוי פשוט קשר, שהוא עץ אינסופי(שמכסה את המעגלים כמו שספירלה יכולה להיות מרחב כיסוי של מעגל).

מרחב כיסוי פשוט קשר נקרא מרחב הכיסוי האוניברסלי, והוא יחיד עד כדי איזומורפיזם.
במקרה של מרחב 8 הוא נראה ככה:



כמובן, זה עץ אינסופי, והענפים ממשיכים הלאה.

נחזור למרחבי כיסוי

יהיו $(E_1, e_1), (E_2, e_2)$ שני מרחבי כיסוי של (B, b), ונניח

$$J_1 = p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) \qquad J_2 = P_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$$

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

נסמן בW סביבה כלשהי בE_1 שמשוכנת לסביבה V של $x \in E_2$ ע"י q: $q(W) \subseteq V$.
$p_2|_V$ הומאומורפיזם.
$p_1|_W = p_2 \circ q|$ הומאומורפיזם.
$q|_W : W \to V$ הומאומורפיזם כי הוא שווה...(תרגיל).
מה קורה אם $J_1 \subseteq J_2$? אז q היא העתקת כיסוי.

הערה

אם יש כיסוי מסדר k, מציין אוילר הוא פי k ממציין אויילר של מרחב הבסיס.
לדוגמה, מציין אויילר של המעגל הוא 0, וכל מרחב כיסוי שלו $n\mathbb{Z}$ יש לא גם מציים אויילר 0.