סיכום פתרון:

1) בניית המילטוניאן H

2) מציאת U_{eff}

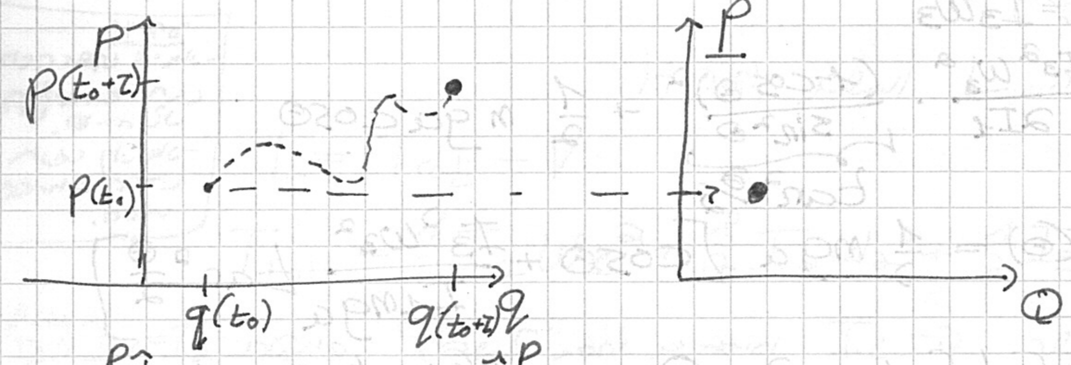
3) לנתח את ה- U_{eff}.

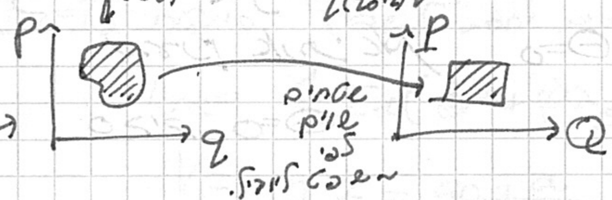
הרצאה 23: משפט ליוביל ומרחב פאזה.

$q \to Q \qquad p \to P$

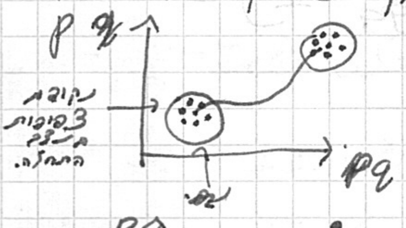
פתרון של משוואות שקול לטרנספורמציה קנונית למשתנים חדשים $q(t_0+\tau)=Q \qquad p(t_0+\tau)=P$

כשהפונקציה היוצרת היא I.

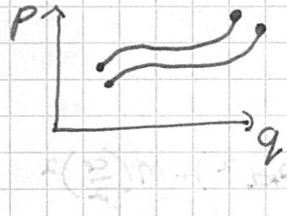




משפט ליוביל: נפח המועתק ממרחב פאזה אחד למרחב פאזה אחר (בטרנס' קנונית) נשמר.



לפי משפט ליוביל הנפח ההתחלתי שווה לנפח הסופי ואף נקודה שהייתה מחוץ לנפח לא תכנס לנפח הסופי.



אז לפי זה:
לא יכולים להפגש. ולהיחתך

הוכחה של משפט ליוביל:

יחידת נפח במרחב q, p.

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_n \, dp_1 \dots dp_n$$

$$\int d\Gamma = \int dq_1 \dots dq_n \, dp_1 \dots dp_n$$

יחידת נפח ב Q,P

$$d\Gamma' = dQ_1 \dots dQ_n \, dP_1 \dots dP_n$$

$$\int d\Gamma' = \int dQ_1 \dots dQ_n \, dP_1 \dots dP_n$$

נניח יש נפח במרחב פאזה Q,P

מה הנפח במרחב q,p

$$\Gamma' = \int dQ_1 \dots dQ_n \, dP_1 \dots dP_n$$

$$\downarrow$$

$$= \int J_{q,p}(Q,P) \, dq_1 \dots dq_n \, dp_1 \dots dp_n$$

הסבר על Jacobian :

$$\int dx$$

$$y = 3x \Rightarrow dy = 3dx$$

$$\int \underset{\text{Jacobian}}{\boxed{\tfrac{1}{3}}} \, dy$$

$$J_{q,p}(Q,P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

צריך לפי משפט ליוביל להוכיח ש $J_{q,p}(Q,P) = 1$.

$$\int dQ_1 \dots dQ_n \, dP_1 \dots dP_n$$

$Q,P \to q,P$

$$\int J_{q,P}(Q,P) \, dq_1 \dots dq_n \, dP_1 \dots dP_n$$

ולכן $J_{q,P}(Q,P) = J_q(Q)$

$$J_q(Q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{vmatrix}$$

$$\overset{q,P}{=}\int J_q(Q)\, dq_1 \dots dq_n\, dP_1 \dots dP_n$$

$$\overset{q,P}{\underset{q,p}{\downarrow}}\int J_q(Q)\, J_{q,p}(q,P)\, dq_1 \dots dq_n\, dp_1 \dots dp_n$$

$$J_{q,p}(q,P) = J_p(P)$$ באופן דומה

$$\int J_q(Q)\, J_p(P)\, dq_1 \dots dp_n$$

$$J_p(P) = \frac{1}{J_P(p)}$$ נוכיח

$$\int dP_1 \dots dP_n \overset{P\to p}{=} \int J_p(P)\, dp_1 \dots dp_n \overset{p\to P}{=} \int J_p(P)\, J_P(p)\, dP_1 \dots dP_n$$

$$J_p(P)\, J_P(p) = 1$$ ולכן

$$\Gamma' = \int \frac{J_q(Q)}{J_P(p)}\, dq_1 \dots dP_n$$ ולכן

$J_q(Q)$ של (i,k) מה צב נכ"ז

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial F^{q,P}}{\partial P_i}\right)$$ תכונה של טרנס קנונית.

$$(i,k)\quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 F^{q,P}}{\partial q_k\, \partial P_i}$$

$J_P(p)$ של (k,i) מה צב רכיב

$$\frac{\partial p_k}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial F^{q,P}}{\partial q_k}\right)$$

$$\underset{J_P(p)}{(k,i)}:\ \frac{\partial p_k}{\partial P_i} = \frac{\partial F^{q,P}}{\partial q_k \partial P_i} : (i,k)\ J_q(Q)$$

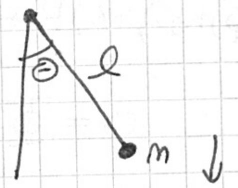
$$J_q(Q) = J_P(p)$$

$$\Gamma' = \int dQ_1 \dots dQ_n\, dP_1 \dots dP_n$$

$$= \int dq_1 \dots dq_n\, dp_1 \dots dp_n = \Gamma$$

$\blacksquare\quad \Gamma' = \Gamma$ הוכחנו דלק

דוגמה:



$P_\Theta ; \Theta$

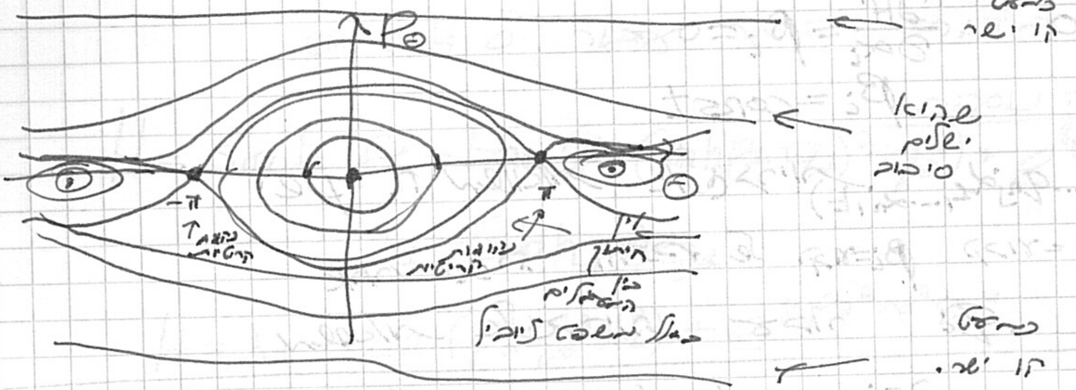
$$T = \frac{1}{2}m(l\dot\Theta)^2 \qquad U = -mgl\cos\Theta \quad \Big\} \quad L = \frac{1}{2}m(l\dot\Theta)^2 + mgl\cos\Theta$$

$$P_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\Theta} = ml^2\dot\Theta$$

$$\dot\Theta = \frac{P_\Theta}{ml^2}$$

$$H = \frac{1}{2}m\,l^2\left(\frac{P_\Theta}{ml^2}\right)^2 - mgl\cos\Theta$$

$$\cancel{H \neq \tfrac{1}{2}}\; H = \frac{P_\Theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\Theta$$



משוואות Hamilton-Jacobi.

action

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H(q_1,\dots,q_n; p_1,\dots,p_n) = 0$$

כמו כן ראינו: $\forall_i \; \frac{\partial I}{\partial q_i} = p_i$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H\left(q_1,\dots,q_n; \frac{\partial I}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial I}{\partial q_n}, t\right) = 0$$

I חייבת לקיים משוואה זו משוואת Hamilton-Jacobi.

$\rightarrow$ H-J (Hamilton-Jacobi) יש $n+1$ משתנים.

$$I = f(q_1,\dots,q_n; \underset{\text{קבוע}}{\alpha_1,\dots,\alpha_n}, t) + \underset{\text{קבוע}}{A}$$

I היא פונקציה וצריכה היות כבר תלויה ב-$\{q_i\}_{i=1}^n$ (נעביר את $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ להיות $P_1,\dots,P_n$. [בהתשובה].

חדשים $Q \longrightarrow \beta_1,\dots,\beta_n$

$$(q,p) \rightarrow (Q,P) := (\beta,\alpha)$$

$$f(q_1,\dots q_n ; \alpha_1,\dots,\alpha_n) = F^{?}$$

$$\forall_i\ p_i = \frac{\partial F^{?}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$\beta_i = Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

$$f(q_1,\dots,q_n ; \alpha_1,\dots \alpha_n ; t)$$

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} ; \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

$$H' = \frac{\partial F}{\partial t} + H = \frac{\partial f}{\partial t} + H = \frac{\partial I}{\partial t} + H = 0$$

$$H' = 0$$

$$\dot\alpha_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = 0 \qquad \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = \dot\beta_i = 0$$

$$\alpha_i = const \qquad \beta_i = const$$

$\beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(q_1,\dots q_n ; \alpha_1,\dots \alpha_n ; t)$ ישנן n משוואות אלגבריות

אחרי גזירה והצבה של הקבוע $\beta_i =$ קבוע $\alpha_i =$ מקבלים

משוואות אלגבריות עבור q_i.

הרצאה 13 - הרצאה אחרונה :-(

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H = 0$$

כשיש $H-J$ איך נמצא את I?

שיטת הפרדת משתנים

בהנתן Hamiltonian

$$H-J \rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} + H = 0$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial t} + H\left(q_1,\dots q_n ; \frac{\partial I}{\partial q_1}, \frac{\partial I}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial I}{\partial q_n} ; t\right)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H\left(\lambda_1\left(q_1, \frac{\partial I}{\partial q_1}\right) ; q_2 \dots q_n ; \frac{\partial I}{\partial q_2} \dots, \frac{\partial I}{\partial q_n} ; t\right)$$

דוגמה:

$$H = \underbrace{q_1 \cdot p_1 (1-p_1)}_{\lambda_1\left(q_1, \frac{\partial I}{\partial q_1}\right)} + q_2^2 + p_2\left(q_1 p_1 (1-p_1)\right)$$

$$\lambda_1\left(q_1 ; \frac{\partial I}{\partial q_1}\right)$$

$$H = \lambda_1 + q_2^2 + p_2(\lambda_1)$$

$$I = I'(q_2,\dots q_n) + I_1(q_1)$$

בואו ננחש