אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 4

1. א. הוכיחו ש $\langle 2x-1\rangle,\langle x-1\rangle$ הם קו-מקסימאליים ב $\mathbb{Z}[x]$.
ב. הוכיחו שהאידיאל $\langle x-1\rangle$ אינו מקסימאלי ב $\mathbb{Z}[x]$ ושהאידיאל $\langle 2x-1\rangle$ גם כן אינו
מקסימאלי ב $\mathbb{Z}[x]$.

2. הוכיחו כי $\mathbb{R}[x]/<x^4-1> \not\cong \mathbb{R}[x]/<x^2-1>$.

3. יהי R חוג קומוטטיבי יהיו שני אידיאלים $I,J \lhd R$ כך ש $I \cap J$ ראשוני. הוכח כי $J \subseteq I$ או $I \subseteq J$.

4. יהי $f: R \to S$ הומ' על מחוג מקומי R לחוג S. הראו ש S מקומי.

5. מצאו a חיובי שלם המקיים $a \equiv 1 \pmod{11}$, $a \equiv 2 \pmod 9$ ו $a \equiv 4 \pmod 5$.

6. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2-1\rangle$ איזומורפי ל $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$

7. יהי n מספר טבעי ונסמן $S=\{n^k : k=0,1,2,\ldots\}$. נסמן ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ את החוג $S^{-1}\mathbb{Z}$.

   א. אם p מספר ראשוני, הוכיחו שאין חוג R המוכל ממש בין $\mathbb{Z}$ ל $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

   ב. מה הם האידיאלים ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right]$?

8. יהי F שדה. הוכיחו כי $R=\left\{\begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c,d \in F\right\}$ הוא חוג מקומי.