# תרגולים 10-11 - עוצמות

12 באוגוסט 2020

נרבה לעסוק היום בהוכחות בעמצעות ק.ש.ב.: אם $A, B$ קבוצות, ונתון שישנה $f : A \to B$ חח"ע, וישנה $g : B \to A$ חח"ע, אז ישנה $h : A \to B$ חח"ע ועל. במילים אחרות: אם $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.
תרגילים:

1. חשבו את עוצמת $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

**פתרון**: מצד אחד $A \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן $|A| \leq \aleph_0$. מצד שני, נגדיר $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, קל לראות ש- $|A| \geq |B| = \aleph_0$.

2. נסמן $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(א) חשבו את עוצמת $X = \{f \in \mathbb{N}^A : f \text{ is 1-1}\}$.

**פתרון**: ראשית, נראה $|X| \leq \aleph_0$ ע"י פונקציה חח"ע $\varphi : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $\varphi(f) = (f(1), f(2), f(3), f(4))$. היא חח"ע כיון שאם $f \neq g$ אז קיים $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ כך ש- $f(i) \neq g(i)$ ולכן $(f(1), f(2), f(3), f(4)) \neq (g(1), g(2), g(3), g(4))$, כי אחד הרכיבים שונים.
נראה כעת $|X| \geq \aleph_0$: ע"י פונקציה חח"ע $F : \mathbb{N} \to X$ המוגדרת ע"י $F(n) = \{(1, n), (2, n + 1), (3, n + 2), (4, n + 3)\} \in X$. $F$ חח"ע, כי אם $n \neq m$ אז בפרט $\underbrace{F(n)}_{\text{function}}(1) = n \neq m = \underbrace{F(m)}_{\text{function}}(1)$, ולכן $F(n) \neq F(m)$.
בסה"כ לפי ק.ש.ב. נקבל $|X| = \aleph_0$.

(ב) חשבו את עוצמת $Y = \{f \in \mathbb{N}^A : f \text{ is not 1-1}\}$.

**פתרון**: ראשית, נראה $|Y| \leq \aleph_0$ ע"י פונקציה חח"ע $\varphi : Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $\varphi(f) = (f(1), f(2), f(3), f(4))$. היא חח"ע כיון שאם $f \neq g$ אז קיים $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ כך ש- $f(i) \neq g(i)$ ולכן $(f(1), f(2), f(3), f(4)) \neq (g(1), g(2), g(3), g(4))$, כי אחד הרכיבים שונים.
נראה כעת $|Y| \geq \aleph_0$: נגדיר פונקציה $F : \mathbb{N} \to Y$ ע"י $F(n) = \{(1, n), (2, n), (3, n)(4, n)\}$, ושוב $F$ חח"ע: כי אם $n \neq m$ אז בפרט $\underbrace{F(n)}_{\text{function}}(1) = n \neq m = \underbrace{F(m)}_{\text{function}}(1)$,

ולכן $F(n) \neq F(m)$.

בסה"כ לפי ק.ש.ב. נקבל $|Y| = \aleph_0$.

3. תהא $A$ קבוצה. נגדיר $O$ קבוצת כל יחסי השקילות על $A$ ונגדיר $P$ קבוצת כל החלוקות על $A$. הוכיחו כי $|O| = |P|$.

**<u>פתרון</u>**: נגדיר $f : O \to P$ ע"י $f(\sim) = {}^{A}\!/\!_{\sim}$. הפיכה ע"י ההופכית $f^{-1} : P \to O$ המוגדרת ע"י $f^{-1}(\{A_i : i \in I\}) = \{(x,y) : \exists i \in I, x \in A_i \wedge y \in A_i\}$. בשיעור על יחסי שקילות הראיתם שאכן $f \circ f^{-1} = I_P, f^{-1} \circ f = I_O$.

4. נסמן ב־ $S$ את קבוצת יחסי השקילות על הטבעיים: $S = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : R \text{ is an equivalence relation}\}$.

(א) הראו ש־ $|S| \leq |P(\mathbb{N})|$.

**<u>פתרון</u>**: נשים לב שלפי הגדרה נקבל $S \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ולכן $|S| \leq |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = א = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|$.

(ב) נסמן $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ונסמן ב־$T$ את אוסף החלוקות של הטבעיים: $T = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ is a partition of } \mathbb{N}\}$. נגדיר $f : P(A) \to T$ ע"י: $f(X) = \{X \cup \{1\}, \mathbb{N} \setminus (X \cup \{1\})\}$. הוכיחו שהיא חח"ע.

**<u>פתרון</u>**: נניח $f(X) = f(Y)$, נקבל $\{X \cup \{1\}, \mathbb{N} \setminus (X \cup \{1\})\} = \{Y \cup \{1\}, \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})\}$. בפרט, $X \cup \{1\} = Y \cup \{1\} \vee X \cup \{1\} = \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})$. כיון ש־ $1 \in X \cup \{1\} \wedge 1 \notin \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})$ , כלומר $X \cup \{1\} \neq \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})$ ולכן (מהשקילות $a \vee b \equiv \neg b \to a$) $X \cup \{1\} = Y \cup \{1\}$, כיון ש־ $1 \notin X, Y$ נקבל $X = Y$.

(ג) הוכיחו: $|S| = |P(\mathbb{N})|$.

**<u>פתרון</u>**: אחרי סעיף א, מספיק להראות $|S| \geq |P(\mathbb{N})|$, ואז לפי ק.ש.ב. נסיים. אכן, ראינו בסעיף הקודם $|T| \leq |P(A)|$. ראינו בשאלה 3 $|S| = |T|$. בנוסף, כיון ש־ $|A| = |\mathbb{N}|$ נקבל $|P(A)| = |P(\mathbb{N})|$ ובסה"כ:

$$|S| \underset{q.3}{=} |T| \underset{q.4b}{\geq} |P(A)| \underset{|A|=|\mathbb{N}|}{=} |P(\mathbb{N})|$$

5. נגדיר יחס $\sim$ על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $f \sim g$ אמ"מ לכל $x$ ממשי $f(x) - g(x)$ שלם.

(א) הוכיחו כי זהו יח"ש.

**<u>פתרון</u>**: רפל': תהי $f$ אזי כמובן לכל $x$ ממשי $f(x) - f(x) = 0 \in \mathbb{Z}$.

סימ: אם $f \sim g$ אז לכל $x$ נקבל $f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $g(x) - f(x) \in \mathbb{Z}$.

טרנ': אם $f \sim g \wedge g \sim h$ אז $f(x) - g(x) = a \wedge g(x) - h(x) = b \Rightarrow f(x) - h(x) = a + b \in \mathbb{Z}$.

(ב) לכל $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו את העוצמה של מחלקת השקילות של $f$ (כלומר $|[f]| = ?$)
**פתרון**: בוודאי שזו קבוצה אינסופית, כלומר $[f] \geq \aleph_0$ (כי כל הפונקציות של הזזה בקבוע שלם שייכות לשם), וכן כמובן $[f] \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ולכן $|[f]| \leq \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.
נראה $|[f]| \geq 2^{\aleph}$. נגדיר פונקציה $F : \mathbb{Z}^{\mathbb{R}} \to [f]$ ע"י $F(g) = f - g$.
היא מוגדרת היטב כי $\forall x : f(x) - (f-g)(x) = f(x) - f(x) + g(x) = g(x) \in \mathbb{Z}$. $F$ חח"ע: נניח $g \neq g' \in \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ אז יש $x$ כך ש־ $g(x) \neq g'(x)$ ולכן $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \neq f(x) - g'(x) = (f-g')(x)$ ולכן $F(g) = f - g \neq f - g' = F(g')$.

(ג) מצאו את עוצמת קבוצת המנה. ברור $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim| \leq 2^{\aleph}$. נרצה להראות $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim| \geq 2^{\aleph}$: נגדיר פונקציה $F : [0,1)^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim$ ע"י: לכל $g \in [0,1)^{\mathbb{R}}$ נסמן ב־: $g'$ את הפונקציה $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שעושה מה ש־$g$ עושה, כלומר, $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = g(x)$, ונגדיר $F(g) = [g']$. נראה ש־$F$ חח"ע: אם $g \neq h \in [0,1)^{\mathbb{R}}$, לכן קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $g'(x) = g(x) \neq h(x) = h'(x)$. וכיון ש־ $g'(x), h'(x) \in [0,1)$ נקבל $g'(x) - h'(x) \notin \mathbb{Z}$, ולכן (ראו הגדרת היחס) $[g'] \cap [h'] = \emptyset$, ולכן $F(g) = [g'] \neq [h'] = F(h)$, ולכן $F$ חח"ע.

6. תהא $A = \mathbb{N}$, חשבו את העוצמות הבאות, כלומר, קבעו האם הן סופיות, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$:
הכלל שעובדים לפיו: אם $2 \leq |A| \leq |B|$ אז $|A|^{|B|} = 2^{|B|}$.

(א) $\left|A^A\right| = |A|^{|A|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
(ב) $\left|P(A)^A\right| = |P(A)|^{|A|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
(ג) $\left|P(A)^{P(A)}\right| = |P(A)|^{|P(A)|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$
(ד) $\left|A \times P(A) \times P(A)^{P(A)}\right| = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph} = 2^{\aleph}$

7. מה עוצמת הקבוצה $X = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(1) \leq f(2)\right\}$
פתרון: ראשית, $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ולכן $|X| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. נגדיר $Y = \mathbb{N}^{\mathbb{N} \setminus \{1\}}$, כמובן $|Y| = \aleph$. כעת, נגדיר פונקציה $F : Y \to X$ ע"י:

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(2) & n = 1 \\ f(n) & n \neq 1 \end{cases}$$

כעת, $F$ חח"ע כי אם $F(f) = F(g)$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $F(f)(n) = F(g)(n)$, ובפרט לכל $n \neq 1$ מתקיים: $f(n) = F(f)(n) = F(g)(n) = g(n)$, ולכן $f = g$ (כי הן שוות על כל התחום). בסה"כ: $\aleph = |Y| \leq |X|$.
ולסיכום: $\aleph \leq |X| \leq \aleph$ ולכן $|X| = \aleph$, לפי ק.ש.ב.

8. מה עוצמת הקבוצה $X = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \notin \mathbb{Q} : f(x) = 1\right\}$
פתרון: נשים לב שלפי התנאי, החלק המעניין של פונקציה $f \in X$ מתרכז ב־ $\mathbb{Q}$. לכן

נוכל להגדיר פונקציה הפיכה $F : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ ע"י:

$$F(f)(q) = f(q)$$

$F$ חח"ע: אם $F(f) = F(g)$ אז נקבל $\forall q \in \mathbb{Q} : f(q) = F(f)(q) = F(g)(q) =$ $g(q)$, ובנוסף $\forall x \notin \mathbb{Q} : f(x) = 1 = g(x)$, ולכן בסה"כ: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)$.
לכן $f = g$ כי הן שוות על כל התחום.
$F$ על: תהי $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, המקור שלה תהיה הפונקציה $f \in X$ המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ולפי הגדרת $F$ נקבל: $F(f) = h$.
ולכן $|X| = |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = א$.

9. תהיינה $A_1, A_2, B_1, B_2$ קבוצות כך ש $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$ . הוכיחו כי $A_2^{A_1} \sim B_2^{B_1}$.

**<u>פתרון</u>**: נתון שקיימת $f_1 : A_1 \to B_1, f_2 : A_2 \to B_2$ הפיכות. נגדיר $F : A_2^{A_1} \to B_2^{B_1}$ ע"י: $F(g) = f_2 \circ g \circ f_1^{-1}$. נראה שהיא הפיכה ע"י ההופכית $F^{-1} : B_2^{B_1} \to A_2^{A_1}$ המוגדרת $F^{-1}(h) = f_2^{-1} \circ h \circ f_1$, וההרכבה כמובן הזהות:

$$F \circ F^{-1}(h) = F(f_2^{-1} \circ h \circ f_1) = f_2 \circ f_2^{-1} \circ h \circ f_1 \circ f_1^{-1} = h$$

$$F^{-1} \circ F(g) = F^{-1}(f_2 \circ g \circ f_1^{-1}) = f_2^{-1} \circ f_2 \circ g \circ f_1^{-1} \circ f_1 = g$$

10. מה עוצמת הקבוצות הבאות:

(א) $F$ קבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$
פתרון: בהרצאה (סרטון של ארז). $\aleph_0$.

(ב) $B$ קבוצת כל תתי הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$
פתרון: בש"ב, תקבלו $2^{\aleph_0}$.

(ג) $C$ קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שעוצמתם שווה $\aleph_0$
פתרון: שימו לב $|P(\mathbb{R})| = 2^{א}$, כאן $C = \{X \in P(\mathbb{R}) : |X| = \aleph_0\}$. לכל $X \in C$ יש $f_X : \mathbb{N} \to X$ הפיכה. ניתן להסתכל על $f_X$ כפונקציה מהטבעיים לממשיים: $\hat{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \hat{f}_X(n) = f_X(n)$. טענה: הפונקציה $F : C \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המוגדרת $F(X) = \hat{f}_X$ היא חח"ע: כי אם $X \neq Y$ אז בה"כ קיים $x \in X \setminus Y$, ולכן יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\hat{f}_X(n_0) = x$, ומצד שני לכל $n \in \mathbb{N}$ $\hat{f}_Y(n) \neq x$ (כי

רק לאיברי $Y$ יש מקור), ולכן $\hat{f}_X(n_0) = x \neq \hat{f}_Y(n_0)$ ולכן $\hat{f}_X \neq \hat{f}_Y$. עד כאן הוכחנו: $|C| \leq \aleph$.
כעת נראה $|C| \geq \aleph$: נשים לב שמתקיים: $B \subseteq C$, ולכן $\aleph = |B| \leq |C|$.
בסה"כ לפי ק.ש.ב.: $|C| = \aleph$.

(ד) $D$ קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שעוצמתם שווה א

פתרון: נסמן $E$ את קבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{R}$. תרגיל: $|E| = \aleph$.
כעת מתקיים: $P(\mathbb{R}) = C \cup E \cup D$, וזהו איחוד זר. לכן נקבל:

$$2^{\aleph} = |P(\mathbb{R})| = |C \cup E| + |D| = \aleph + |D|$$

אילו $|D| < 2^{\aleph}$ אז היינו מקבלים $\aleph + |D| = \max\{\aleph, |D|\} < 2^{\aleph}$ בסתירה.
לכן $|D| = 2^{\aleph}$.