

תרגיל 8

(שימו לב: בתרגיל זה שתי השאלות להגשה)

שאלה 1

1. תהי f פונקציה אינטגרבילית אי שלילית בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי אם קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- f רציפה ב- c ו- $f(c) \neq 0$, אז $\int_a^b f(x) dx > 0$.
2. האם ניתן לומר על דרישת הרציפות בנקודה c בסעיף 1? נמקו!
3. הוכיחו כי הפונקציה $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ אינטגרבילית ב- $[0, \frac{\pi}{2}]$, והוכיחו (מבלי לחשב את האינטגרל) את האי שוויון הבא:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} \leq \frac{\pi}{2}$$

4. הוכיחו כי:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} < \frac{\pi}{2}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל קבוצה של מספרים ממשיים $S \subseteq \mathbb{R}$, ולכל כיסוי של הקבוצה על ידי קטעים פתוחים $A = \{P_i\}_{i \in I}$, יש תת-כיסוי בן מניה.

הדרכה: לכל $x \in S$ נגדיר את הקטע

$$I_x = \left(\inf \left\{ y \mid (y, x) \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i \right\}, \sup \left\{ y \mid (x, y) \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i \right\} \right) \neq \emptyset$$

הראו:

1. לכל $x \in S$ הקבוצה I_x ניתנת לכיסוי בן מניה ע"י קבוצות מ- A .
 2. לכל $x, x' \in S$ מתקיים כי $I_x = I_{x'}$ או ש $I_x \cap I_{x'} = \emptyset$.
 3. $\bigcup_{x \in S} I_x = S$.
- התאימו לכל I_x נקודה q_x כך ש $q_x \in \mathbb{Q} \cap I_x$. כעת, בעזרת ההתאמה והמסקנות הקודמות הסיקו את הנדרש.

בהנאה!