מבנים דיסקרטיים – תרגיל 7

שאלה 1
יהי $(R,+,\cdot)$ חוג עם יחידה. נסמן ב-R^* את קבוצת האיברים ההופכיים ב-R.

א. הוכיחו כי $(R^*,\ \cdot)$ חבורה.
ב. מצאו את $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{R}^*$ ואת $\mathbb{Z}_{12}^*$.

שאלה 2
יהי F שדה ויהי $0 \neq f \in F[x]$. הראו כי f הפיך ב-$F[x]$ אם ורק אם $\deg f = 0$. [רמז: העזרו בעובדה שעבור $f,g \in F[x]$ מתקיים $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.]

שאלה 3
יהי R חוג חילופי עם יחידה. יהי u איבר הפיך ב-R ויהיו $a,b \in R$. הוכיחו כי $a|b$ אם ורק אם $ua|b$.

[תזכורת: $a|b$ אומר שקיים $c \in R$ כך ש-$b = ac$.]

שאלה 4
יהי R חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי 0 (כלומר, $ab = 0$ גורר $a = 0$ או $b = 0$).

א. יהיו $a,b,c \in R$. הראו כי אם $ab = ac$ ו-$a \neq 0$ אז $b = c$.
ב. יהיו $a,b \in R$. הראו כי $a|b$ וגם $b|a$ אם ורק אם קיים $u \in R$ הפיך כך ש-$a = ub$.

שאלה 5
א. חשבו את $\gcd(54,33)$ ומצאו מספרים שלמים $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ כך ש-$\gcd(54,33) = 54\alpha + 33\beta$.
ב. חשבו את $\gcd(68,57)$ ומצאו מספרים שלמים $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ כך ש-$\gcd(68,57) = 68\alpha + 57\beta$.

שאלה 6
מצאו פולינומים $q(x),r(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש-$x^4 + x = q(x)(x^2 + 2x - 2) + r(x)$ ו-$\deg r(x) < 2$.