שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית 5

<u>שאלה 1</u>

<u>הגדרה</u>: יהי $\left(X,\|\ \|\right)$ מרחב נורמי. נאמר ש- $A\subseteq X$ חסומה בנורמה אם קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש- $\|x\|\le M \quad : \quad \forall x\in A$.

תהיינה $\|\ \|_1,\|\ \|_2$ נורמות שקולות מעל מרחב וקטורי X (כלומר קיימים $a,b>0$ כך שלכל $x\in X$, $\|x\|_1\le a\|x\|_2\wedge\|x\|_2\le b\|x\|_1$).

א) תהי A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_1\right)$. הוכיחו ש- A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_2\right)$.

ב) תהי A חסומה ב- $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית. האם A חסומה בהכרח ב- $\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית.

ג) תהי d מטריקה <u>שקולה למטריקה האוקלידית</u> ונניח ש- A חסומה ב- $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$. האם A חסומה בהכרח ב- $\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית.

<u>שאלה 2</u>

א. נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$.

<u>הדרכה</u>: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו

שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים:

$$C=\bigcap_{i\in I}\left(A_i\cup T_i\right)=\bigcap_{i\in I}A_i\cup\left(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\right).$$

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ נגדיר $O_n=\{n,n+1,n+2,...\}$. נסמן $\tau=\{\varnothing,O_1,O_2,...,O_n,...\}$. הוכיחו:

1. $(\mathbb{Z},\tau)$ מרחב טופולוגי.

2. $(\mathbb{Z},\tau)$ אינו מטריזבילי.

<u>שאלה 3</u>

תזכורת:

תהי Y קבוצה כלשהי, ותהי $p\notin Y$ ויהי $X=\{p\}\cup Y$. נגדיר $\tau=\left\{O\subseteq X: p\notin O \ \vee\ \left|O^c\right|\leq\aleph_0\right\}$.

א. הוכיחו ש-(X,τ) הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $|X|\leq\aleph_0$. הוכיחו כי $\tau=\tau_{disc}$.

ג. בתנאי סעיף ב', האם (X,τ) מטריזבילי?

<u>שאלה 4</u>

<u>תזכורת</u>

נתבונן ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau \subset T$ (הכלה אמיתית!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

שאלה 5

תהי $p \notin \mathbb{R}$ ויהי $X = \{p\} \cup \mathbb{R}$, תהי $\tau = \left\{O \subseteq X : p \notin O \vee \left|O^c\right| \leq \aleph_0\right\}$.

א. יהי Y מ"ט כלשהו. תהי $f:(X,\tau) \to Y$ פונקציה, ותהי $X \supseteq \{x_n\}$ סדרה מתכנסת: $x_n \xrightarrow{\tau} x \in X$. הוכיחו ש- $f(x_n) \to f(x)$.

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי מטריזבילי Y, ופונקציה $g:(X,\tau) \to Y$ שאינה רציפה.

ג. הסיקו <u>משני הסעיפים הקודמים</u> שהמרחב (X,τ) אינו מטריזבילי.

שאלה 6

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה).
הראו ש (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות סגורות. הראו ש X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה: הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח הטופולוגיה הטריוויאלית? נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!